САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. В. ОЛЕМСКОЙ, О. С. ФИРЮЛИНА, О. А. ТУМКА

АЛГОРИТМЫ ПРИВЕДЕНИЯ К ПОЛНОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ СТРУКТУРНО РАЗДЕЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Издательство С.-Петербургского университета
2020

УДК 519.62/.642
ББК

Р е ц е н з е н т ы : д-р тех. наук, проф. *Д.П. Голоскоков* (СПбГУВК); д-р физ.-мат. наук, проф. *Е.И. Веремей* (СПбГУ)

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Олемской И.В., Фирюлина О.С., Тумка О.А.

Алгоритмы приведения к полной канонической форме структурно разделенных дифференциальных уравнений . — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2020.– 34 с.

ISBN

В учебном пособии вводятся основные понятия теоретико-множественного аппарата, необходимого для формализации алгоритмов приведения систем обыкновенных дифференциальных уравнений к виду,обеспечивающему максимальную экономичность при их численном интегрировании. Доказаны утверждения, являющиеся базовыми в алгоритмах выделения структурных особенностей. Даны алгоритмы построения искомых преобразований и представлены их блоксхемы. Рассмотрены примеры реализации предложенных алгоритмов. На классических задачах естествознания продемонстрирована работа представленного алгоритма для построения экономичного инструментария их исследования.

Книга предназначена для студентов университетов, обучающихся по образовательным программам:"Системный анализ и прикладные компьютерные технологии", "Прикладная математика и информатика", и разработана в рамках специальных дисциплин "Современные вычислительные методы в задачах естествознания". Она также может быть полезна научным работникам, специализирующимся в области численных методов.

ISBN

Перейти к оглавлению на странице: 33

§1. Полная каноническая форма структурно разделенных дифференциальных уравнений

Для эффективного использования структурного метода (достаточно полно представленного в работах [1] - [3], [5]- [7], [9]) интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида

$$z_k' = \varphi_k(x, z_1, \ldots, z_m), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.1}$$

необходимо преобразование [4],[8] , приводящее систему (1.1) к *полной канонической форме* структурно разделенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_0' = f_0(x, y_0, \ldots, y_n), \tag{1.2}$$

$$y_i' = f_i(x, y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{l+1}, \ldots, y_n), \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{1.3}$$

$$y_j' = f_j(x, y_0, \ldots, y_{j-1}), \qquad j = l+1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

$$x \in [X_0, X_k] \subset \mathbb{R}, \qquad y_s : [X_0, X_k] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_s}, \qquad s = 0, \ldots, n,$$

$$f_0 : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^g \longrightarrow \mathbb{R}^{r_0}, \qquad \sum_{s=0}^{n} r_s = g,$$

$$f_i : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{g-\hat{r}^i} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}, \qquad \hat{r}^i = \sum_{s=i}^{l} r_s, \qquad i = 1, \ldots, l,$$

$$f_j : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{g-\bar{r}^j} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_j}, \qquad \bar{r}^j = \sum_{s=j}^{n} r_s, \qquad j = l+1, \ldots, n.$$

Две группы уравнений (1.3), (1.4) структурно тождественны. Каждое уравнение одной из групп этих уравнений занимает определенное место в последовательности уравнений своей группы. Его правая часть не зависит от искомых функций, поведение которых описывается этим и всеми последующими уравнениями этой же группы. Группа уравнений (1.2), в которую вошли все уравнения, не имеющие структурных особенностей указанного выше типа, называется *общей*. Она, как и группа уравнений (1.3), может отсутствовать. Необходимость в интегрировании систем такого типа возникает, например, в задачах небесной механики, физики высоких энергий.

В качестве преобразования, приводящего систему (1.1) к виду (1.2)–(1.4), будем использовать перестановку (переобозначение) уравнений системы (1.1).

Задача состоит в том, чтобы указать такой порядок следования уравнений и нумерации переменных исходной системы (1.1), при котором для преобразованной системы

$$\pi z' = \pi\varphi(x, \pi z) \tag{1.5}$$

с выделенными особенностями (1.2)–(1.4), эффект от применения структурного подхода будет максимальным, т.е. максимально отношение

$$\sum_{s=r_0+1}^{m} w_{\pi(s)} \Big/ \sum_{s=1}^{m} w_{\pi(s)}.$$

Здесь и в дальнейшем $\pi z = \left(z_{\pi(1)}, z_{\pi(2)}, \ldots, z_{\pi(m)}\right)^T$, $\pi\varphi = \left(\varphi_{\pi(1)}, \varphi_{\pi(2)}, \ldots, \varphi_{\pi(m)}\right)^T$, $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \ \ldots, \pi(m))$ – перестановка элементов множества $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, определяющая порядок следования уравнений системы (1.1). Причем здесь (для наглядности изложения алгоритма и постановки задачи) равенство $\pi(i) = j$– означает, что j-е уравнение системы (1.1) будет занимать i-е место в системе (1.5). С учетом этого можно установить связь между уравнениями исходной системы (1.1) и системы (1.2)–(1.4):

$$y_s = \left(z_{\pi(\sum_{\nu=0}^{s-1} r_\nu + 1)}, z_{\pi(\sum_{\nu=0}^{s-1} r_\nu + 2)}, \ldots, z_{\pi(\sum_{\nu=0}^{s} r_\nu)}\right)^T,$$

$$f_s = \left(\varphi_{\pi(\sum_{\nu=0}^{s-1} r_\nu + 1)}, \varphi_{\pi(\sum_{\nu=0}^{s-1} r_\nu + 2)}, \ldots, \varphi_{\pi(\sum_{\nu=0}^{s} r_\nu)}\right)^T, \ s = 0, \ldots, n.$$

Далее w_s– весовые коэффициенты, либо задаваемые пользователем, либо вычисляемые как относительные доли затрат (число арифметических операций, время) вычисления правой части φ_s от общего числа вычислений всех компонент вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $s = 1, \ldots, m$. Обозначим через $P = \{\pi\}$ множество всех перестановок из m элементов $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$.

§2. Основные понятия

Определение 2.1. *Матрицу* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^m$ *будем называть* **структурной матрицей** *системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1.1) *и обозначать* $A(\varphi)$, *если её элементы*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi_i \text{ не зависит от } z_j, \\ 1, & \text{если} \quad \varphi_i \text{ зависит от } z_j. \end{cases}$$

Так, структурная матрица системы (1.2)–(1.4) имеет вид

$$A(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} * & * & \cdots & * & * & * & * \\ \hline * & \mathbf{O}_{r_1\times r_1} & \cdots & \mathbf{O}_{r_1\times r_l} & * & * & * \\ \hline \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline * & * & * & \mathbf{O}_{r_l\times r_l} & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & \mathbf{O}_{r_{l+1}\times r_{l+1}} & \cdots & \mathbf{O}_{r_{l+1}\times r_n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \hline * & * & * & * & * & * & \mathbf{O}_{r_n\times r_n} \end{array}\right).$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{O}_{r_i\times r_j}$ — нулевая матрица размерности $r_i \times r_j$. Символом «*» обозначены блоки, которые могут быть и ненулевыми.

Определение 2.2. Множество, элементами которого являются номера компонент искомой вектор-функции $z = \{z_1, \ldots, z_m\}$, от которых не зависит правая часть i-го уравнения СОДУ (1.1), будем называть i-м **горизонтальным** структурным множеством СОДУ (1.1) и обозначать $E_i(\varphi)$, т.е.

$$E_i(\varphi) = \{j \in I_p \,:\, a_{ij} = 0, \ A(\varphi) = \left\{a_{\nu\mu}\right\}_{\nu,\mu=1}^m\}.$$

Перейти к оглавлению на странице: 33

Определение 2.3. Множество, элементами которого являются номера уравнений СОДУ (1.1) с правыми частями не зависящими от j-й компоненты вектор-функции $z = \{z_1, \dots, z_m\}$, будем называть j-м **вертикальным** структурным множеством СОДУ (1.1) и обозначать $H_j(\varphi)$:

$$H_j(\varphi) = \{i \in I_m \,:\, a_{ij} = 0,\; A(\varphi) = \{a_{\nu\mu}\}_{\nu,\mu=1}^{m}\}.$$

Пусть $r = (r_0, r_1, \dots, r_n) \in \big(\{0\} \cup N\big) \times N^n$. Введем в рассмотрение

$$\delta(r,k) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i,\;\; \delta(r,0) = 0,\;\; \delta(r, n+1) = m.$$

Определение 2.4. Будем говорить, что СОДУ (1.1) имеет **нуль-структуру** с параметрами $l \in \{0\} \cup N$, $n \in N$, $l < n$, $r = (r_0, r_1, \dots, r_n) \in \in \big(\{0\} \cup N\big) \times N^n$, $\delta(r, n+ +1) = m$ и обозначать $ZS^m_\varphi[l,n,r]$, если для горизонтальных множеств справедливы включения:

$$\begin{aligned} &\{\delta(r,i)+1, \dots, \delta(r,l+1)\} \subset E_{\delta(r,i)+\mu(i)}(\varphi),\\ &\qquad i = 1, \dots, l\,,\; n > l > 0,\\ &\{\delta(r,j)+1, \dots, \delta(r,n+1)\} \subset E_{\delta(r,j)+\mu(j)}(\varphi),\\ &\qquad i = l+1, \dots, n,\;\; n > l \geqslant 0\,, \end{aligned}$$

где $\mu(s) = 1, \dots, r_s,\;\; s = 1, \dots, n.$

Можно ввести это же понятие, используя определение структурной матрицы.

Определение 2.5. Будем говорить, что СОДУ (1.1) имеет **нуль-структуру** с параметрами $l \in \{0\} \cup N$, $n \in N$, $l < n$, $r = (r_0, r_1, \dots, r_n) \in \in \big(\{0\} \cup N\big) \times N^n$, $\delta(r, n+1) = m$ и обозначать $ZS^m_\varphi[l,n,r]$, если для элементов структурной матрицы $A(\varphi)$, СОДУ (1.1) справедливы равенства

$$a_{\xi(s)\nu(s)} = 0, \quad s = 1, \dots, n,$$

где

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \;\; \delta(r,s)+1, \dots, \delta(r,s+1),\\ \nu(s) &= \begin{cases} \delta(r,s)+1, \dots, \delta(r,l+1), & \text{если} \quad 0 < l < n \;\;\, s \leqslant l,\\ \delta(r,s)+1, \dots, \delta(r,n+1), & \text{если} \quad 0 \leqslant l < n \;\;\, s > l. \end{cases} \end{aligned}$$

Так, СОДУ (1.2)–(1.4) имеет нуль-структуру $ZS^m_f[l,n,r]$.

Структурная матрица СОДУ (1.2)–(1.4) с нуль-структурой $ZS^m_f[0,n,r]$, $n \in \in N$ имеет вид

$$A(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} * & * & \cdots & * \\ \hline * & \mathbf{O}_{r_1\times r_1} & \cdots & \mathbf{O}_{r_1\times r_n} \\ \hline \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \hline * & * & * & \mathbf{O}_{r_n\times r_n} \end{array}\right).$$

Лемма 2.1. *Элемент $j \in E_i\big(\pi\varphi\big)$, $\big(i \in H_j(\pi\varphi)\big)$, тогда и только тогда, когда $\pi(j) \in E_{\pi(i)}(\varphi)$, $\big(\pi(i) \in H_{\pi(j)}(\varphi)\big)$, для $\pi \in P$, $i, j \in I_m$.*

Доказательство. Элементы структурных матриц СОДУ (1.1) $A(\varphi) = \{a_{\nu\mu}\}_{\nu,\mu=1}^{m}$ и СОДУ (1.5) $A(\pi\varphi) = \{b_{\nu\mu}\}_{\nu,\mu=1}^{m}$ связаны отношением

$$b_{\nu\mu} = a_{\pi(\nu)\pi(\mu)}. \tag{2.1}$$

Доказательство необходимости. Пусть $j \in E_i(\pi\varphi)$, $(i \in H_j(\pi\varphi))$. Согласно определению структурных множеств, $b_{ij} = 0$. Значит, в силу равенства (2.1), $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0$, и справедливо включение: $\pi(j) \in E_{\pi(i)}(\varphi)$, $\big(\pi(i) \in H_{\pi(j)}(\varphi)\big)$. ■

Доказательство достаточности. Пусть $\pi(j) \in E_{\pi(i)}(\varphi)$, $\big(\pi(i) \in H_{\pi(j)}(\varphi)\big)$, следовательно, $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0$, и соотношение (2.1) обеспечивает равенство $b_{ij} = 0$. Таким образом, для структурных множеств СОДУ (1.5) справедливы включения: $j \in E_i(\pi\varphi)$, $(i \in H_j(\pi\varphi))$. ■

Определение 2.6. Будем говорить, что нуль-структура $ZS_{\varphi}^{m}[l,n,r]$ СОДУ (1.1) — **предельная** и обозначать ее $\overline{ZS_{\varphi}^{m}}[l,n,r]$, если справедливы невключения:

$$\big\{\delta(r,1),\dots,\delta(r,l+1)\big\} \not\subset E_{\delta(r,1)}(\varphi),\ l>0, \qquad \text{и}$$
$$\big\{\delta(r,l+1),\dots,\delta(r,n+1)\big\} \not\subset E_{\delta(r,l+1)}(\varphi),\ l \geqslant 0.$$

Определение 2.7. Под **объемом** нуль-структуры $ZS_{\varphi}^{m}[l,n,r]$ СОДУ (1.1) будем понимать величину $\sum_{\nu=r_0+1}^{m} w_\nu$ и обозначать ее $|ZS_{\varphi}^{m}[l,n,r]|$, где $w_\nu-$ весовые коэффициенты.

В соответствии с определением предельной нуль-структуры справедливо неравенство $|\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[l,n,r]| > |ZS_{\pi\varphi}^{m}[\hat{l},\hat{n},\hat{r}]|$, $\pi \in P$.

Задача 1. Найти перестановку $\pi^* \in P$, для которой справедливо неравенство

$$|\overline{ZS^m}_{\pi^*\varphi}[0,n,r]| \geqslant |\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[0,\hat{n},\hat{r}]|,\ \forall\pi \in P.$$

Задача 2. Найти перестановку $\pi^* \in P$, для которой справедливо неравенство

$$|\overline{ZS^m}_{\pi^*\varphi}[l,n,r]| \geqslant |\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[\hat{l},\hat{n},\hat{r}]|,\ \forall\pi \in P.$$

Определение 2.8. Множество $B_\varphi = B_\varphi(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_d) \subset I_m$ будем называть **элементным нуль-структурным основанием** СОДУ (1.1), если для

$$B_\varphi = \bigcup_{s=1}^{d} \omega_s, \quad \omega_q \cap \omega_s = \varnothing,\ q \neq s,$$

справедливы включения

$$\bigcup_{s=j}^{d} \omega_s \subset E_k, \quad \forall k \in \omega_j,\ j = 1,\dots,d.$$

Определение 2.9. Для любого множества $G \subset I_m$ величину $\sum_{i\in G} w_i$ будем называть **весом множества** G и обозначать $\mathbf{V}[G]$:

$$\mathbf{V}[G] = \sum_{i\in G} w_i.$$

Лемма 2.2. *Для того, чтобы множество W было подмножеством j-го горизонтального структурного множества СОДУ (1.1), для любого j, принадлежащего множеству V, необходимо и достаточно, чтобы множество V было подмножеством k-го вертикального структурного множества СОДУ (1.1) для любого k из множества W:*

$$W \subset E_j(\varphi),\ \forall j \in V \Leftrightarrow V \subset H_k(\varphi),\ \forall k \in W, \quad V, W \subset I_p. \tag{2.2}$$

Доказательство необходимости. Пусть $W \subset E_j(\varphi),\ \forall j \in V$, и значит $k \in \in E_j(\varphi)$, $\forall j \in V$, $\forall k \in W$ и, в силу *определения* 2.2, элемент a_{jk} структурной матрицы $A(\varphi)$ СОДУ (1.1) равен нулю. А это значит, в соответствии с *определением* 2.3, что $j \in H_k(\varphi)$, $\forall j \in V$, $\forall k \in W$.

Таким образом, множество $V \subset H_k(\varphi)$, $\forall k \in W$. ■

Доказательство достаточности. Пусть $V \subset H_k(\varphi)$, $\forall k \in W$, т.е. $\forall j \in V$, $j \in \in H_k(\varphi)$ при $\forall k \in W$ и, в силу *определения* 2.3 элемент структурной матрицы $A(\varphi)$ СОДУ (1.1) $a_{jk} = 0$. Но, в соответствии с *определением* 2.2, это значит, что $k \in E_j(\varphi)$, $\forall j \in V$ и $\forall k \in W$. Отсюда и следует, что $W \subset E_j(\varphi)$ для $\forall j \in V$. ■

Лемма 2.3. *Объединение $d + 1 - j$ множеств $\omega_j,\ \omega_{j+1},\ \ldots,\ \omega_d$ является подмножеством i-го горизонтального структурного множества СОДУ (1.1) для любого i из множества ω_j тогда и только тогда, когда объединение j множеств $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_j$ является подмножеством i-го вертикального структурного множества СОДУ (1.1) для любого i из множества ω_j:*

$$\bigcup_{\nu=j}^{d} \omega_\nu \subset E_i(\varphi) \Leftrightarrow \bigcup_{\nu=1}^{j} \omega_\nu \subset H_i(\varphi), \quad \forall i \in \omega_j,\ j = 1, \ldots, d. \tag{2.3}$$

Доказательство необходимости. Пусть

$$\bigcup_{\nu=j}^{d} \omega_\nu \subset E_i(\varphi),\ \forall i \in \omega_j,\ j = 1, \ldots, d,$$

отсюда следует

$$\omega_j \subset E_i(\varphi), \quad \omega_{j+1} \subset E_i(\varphi), \ldots, \omega_d \subset E_i(\varphi), \quad j = 1, \ldots, d,\ \forall i \in \omega_j,$$

и в соответствии с леммой 2.2

$$\omega_j \subset H_i(\varphi),\ \forall i \in \omega_j,\ \omega_j \subset H_i(\varphi),\ \forall i \in \omega_{j+1},\ \ldots, \omega_j \subset H_i(\varphi),\ \forall i \in \omega_d,\ j = 1, \ldots, d.$$

Но это значит, что

$$\bigcup_{\nu=1}^{d} \omega_\nu \subset H_i(\varphi), \quad \forall i \in \omega_j, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Что и требовалось доказать. ■

Доказательство достаточности. Пусть

$$\bigcup_{\nu=1}^{j} \omega_\nu \subset H_i(\varphi), \quad \forall i \in \omega_j, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Отсюда следует

$$\omega_1 \subset H_i(\varphi), \quad \omega_2 \subset H_i(\varphi), \ldots, \omega_j \subset H_i(\varphi), \quad \forall i \in \omega_j, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Используя утверждение леммы 2.2, выпишем включения

$$\omega_j \subset E_i(\varphi),\ \forall i \in \omega_1, \quad \omega_j \subset E_i(\varphi),\ \forall i \in \omega_2,\ \ldots$$
$$\ldots \omega_j \subset E_i(\varphi),\ \forall i \in \omega_j,\ j = 1, \ldots, d.$$

Но это значит, что верно

$$\bigcup_{\nu=j}^{d} \omega_\nu \subset E_i(\varphi), \quad \forall i \in \omega_j, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Что и требовалось доказать. ■

Рассмотрим множество $W \subset I_m$. Перенумеруем элементы этого множества с использованием чисел натурального ряда $W = = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$. $|W| = q$ — здесь и в дальнейшем мощность множества W. Пусть $r = (r_1, r_2, \ldots, r_d) \in N^d$. Введем в рассмотрение

$$h(r,s) = \sum_{i=1}^{s} r_i, \quad h(r,0) = 0, \quad h(r,d) = |W|.$$

Теорема 2.1. *Для того, чтобы множество $W = \{i_1,\ i_2, \ldots, i_q\}$ было элементным нуль-структурным основанием $W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_d)$, $|\omega_s| = r_s$, $s = 1, \ldots, d$, СОДУ (1.1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\{i_g, i_{g+1}, \ldots, i_{h(r,d)+1-g}\} \subset E_{i_g}(\varphi) \bigcap H_{i_{h(r,d)+1-g}}(\varphi), \qquad g = 1, \ldots, h(r,d) - \left[\frac{h(r,d)}{2}\right], \tag{2.4}$$

и

$$\{i_{h(r,s-1)+1}, i_{h(r,s-1)+2}, \ldots, i_{h(r,s-1)+k}\} \subset E_{i_{h(r,s-1)+k}}(\varphi), \qquad k = 1, \ldots, r_s,\ \ s = 1, \ldots, d. \tag{2.5}$$

Здесь и в дальнейшем $[a]$ — целая часть числа $a \in R$.

Доказательство необходимости. Пусть $W = \{i_1, i_2, \ldots,\ i_{h(r,d)}\}$ — элементное нуль-структурное основание. Значит, справедливы включения

$$\bigcup_{j=s}^{d} \omega_j \subset E_k(\varphi), \forall k \in \omega_s, \qquad \omega_s = \{i_{h(r,s-1)+1}, i_{h(r,s-1)+2}, \ldots, i_{h(r,s)}\}, \quad s = 1, \ldots, d, \tag{2.6}$$

которые можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered}\{i_{h(r,s-1)+1}, i_{h(r,s-1)+2}, \dots, i_{h(r,d)}\} \subset E_{i_{h(r,s-1)+k}}(\varphi),\\ k=1,\dots,r_s,\ s=1,\dots,d.\end{gathered}$$

Разобьем это включение на два:

$$\{i_{h(r,s-1)+k}, i_{h(r,s-1)+2}, \dots, i_{h(r,d)}\} \subset E_{i_{h(r,s-1)+k}}(\varphi), \tag{2.7}$$

$$\{i_{h(r,s-1)+1}, i_{h(r,s-1)+2}, \dots, i_{h(r,s-1)+k}\} \subset E_{i_{h(r,s-1)+k}}(\varphi), \tag{2.8}$$

$$k=1,\dots,r_s,\ s=1,\dots,d.$$

Воспользовавшись утверждением леммы 2.3, перепишем (2.6) в виде

$$\bigcup_{j=1}^{d+1-s} \omega_j \subset H_k(\varphi),\ \forall k\in\omega_{d+1-s},\quad s=1,\dots,d. \tag{2.9}$$

Но отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\{i_1, i_2, \dots, i_{h(r,d+1-s)}\} \subset H_{i_{h(r,d+1-s)+1-k}}(\varphi),\\ k=1,\dots,r_{d+1-s},\ s=1,\dots,d.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Включение (2.10) представимо в виде совокупности двух включений:

$$\{i_1, \dots, i_{h(r,d+1-s)+1-k}\} \subset H_{i_{h(r,d+1-s)+1-k}}(\varphi), \tag{2.11}$$

$$\{i_{h(r,d+1-s)+1-k}, \dots, i_{h(r,d+1-s)}\} \subset H_{i_{h(r,d+1-s)+1-k}}(\varphi), \tag{2.12}$$

$$k=1,\dots,r_{d+1-s},\ s=1,\dots,d.$$

Включения (2.7) и (2.11) запишем в виде

$$\{i_k, \dots, i_{h(r,d)}\} \subset E_{i_k}(\varphi), \tag{2.13}$$

и

$$\{i_1, \dots, i_{h(r,d)+1-k}\} \subset H_{i_{h(r,d)+1-k}}(\varphi),\ k=1,\dots,h(r,d) \tag{2.14}$$

соответственно. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\{i_k, i_{k+1}, \dots, i_{h(r,d)+1-k}\} \subset E_{i_k}(\varphi) \bigcap H_{i_{h(r,d)+1-k}}(\varphi),\\ k=1,\dots,h(r,d)-\left[\frac{h(r,d)}{2}\right].\end{gathered}$$

■

Доказательство достаточности. Пусть для элементов множества $W=\{i_1, i_2, \dots, i_{h(r,d)}\}$ справедливы включения (2.4) и (2.5). Значит, справедливы соотношения:

$$\{i_g, \dots, i_{h(r,d)+1-g}\} \subset E_{i_g}(\varphi), \tag{2.15}$$

и

$$\{i_g,\dots,i_{h(r,d)+1-g}\}\subset H_{i_{h(r,d)+1-g}}(\varphi),\quad g=1,\dots,h(r,d)-\left[\frac{h(r,d)}{2}\right]. \tag{2.16}$$

Тогда, согласно лемме 2.2, при некотором g из (2.16) следует, что

$$\begin{aligned} &i_{h(r,d)+1-g}\subset E_{i_k}(\varphi), \\ &k=g,g+1,\dots,h(r,d)+1-g,\quad g=1,\dots,h(r,d)-\left[\frac{h(r,d)}{2}\right]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Из соотношений (2.17) следует справедливость включений

$$\{i_{h(r,d)+1-g},\dots,i_{h(r,d)}\}\subset E_{i_g}(\varphi),\quad g=1,\dots,h(r,d)-\left[\frac{h(r,d)}{2}\right] \tag{2.18}$$

и

$$\{i_k,\dots,i_{h(r,d)}\}\subset E_{i_k}(\varphi),\quad k=\left[\frac{h(r,d)}{2}\right]+1,\dots,h(r,d). \tag{2.19}$$

Для наглядности перепишем (2.19) в виде

$$\begin{aligned} &\{i_{h(r,s-1)+k},i_{h(r,s-1)+k+1},\dots,i_{h(r,d)}\}\subset E_{i_{h(r,s-1)+k}}(\varphi), \\ &\quad k=1,\dots,r_s,\ s=1,\dots,d, \end{aligned}$$

и с учетом второго условия теоремы 2.1 верно включение

$$\begin{aligned} &\{i_{h(r,s-1)+1},i_{h(r,s-1)+2},\dots,i_{h(r,d)}\}\subset E_{i_{h(r,s-1)+k}}(\varphi), \\ &\quad k=1,\dots,r_s,\ s=1,\dots,d. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Затем, если положить

$$\omega_s=\{i_{h(r,s-1)+1},i_{h(r,s-1)+2},\dots,i_{h(r,s)}\},$$

то (2.20) примет вид

$$\bigcup_{j=s}^{d}\subset E_i(\varphi),\quad \forall i\in\omega_s,\ s=1,\dots,d,\ \omega_k\cap\omega_g=\varnothing,\quad k\neq g.$$

Что и требовалось доказать. ■

Теорема 2.2. *Для того, чтобы на множестве перестановок $P=\{\pi\}$ существовала такая $\pi^*\in P$, что СОДУ (1.5) имела бы нуль-структуру $Z^m_{\pi^*\varphi}[0,n,r]$, необходимо и достаточно, чтобы существовало элементное нуль-структурное основание $W_\varphi(\omega_1,\dots,\omega_n)$, для которого $\omega_0=I_m\backslash W_\varphi(\omega_1,\dots,\omega_n)$, а $|\omega_s|=r_s$, $s=0,\dots,d$.*

Доказательство необходимости. Пусть на $\pi^*\in P$ СОДУ (1.5) имеет нуль-структуру $ZS^m_{\pi^*\varphi}[0,n,r]$. Тогда в силу *определения 2.4* справедливы включения

$$\{\delta(r,i)+1,\delta(r,i)+2,\dots,\delta(r,n+1)\}\subset E_{g(i)}(\pi^*\varphi) \tag{2.21}$$

для

$$i = 1, \ldots, n, \quad \delta(r, i) < g(i) \leqslant \delta(r, i+1).$$

Но по лемме 2.1 включению (2.21) эквивалентно следующее:

$$\{\pi^*(\delta(r, i) + 1), \pi^*(\delta(r, i) + 2), \ldots, \pi^*(\delta(r, n+1)\} \subset E_{\pi^*(g(i))}(\varphi), \tag{2.22}$$

где

$$\delta(r, i) < g(i) \leqslant \delta(r, i+1), \ i = 1, \ldots, n.$$

Обозначим через ω_s множество, элементами которого являются элементы перестановки $\pi^*(\delta(r, s) + 1)$, $\pi^*(\delta(r, i) + 2)$, $\ldots$, $\pi^*(\delta(r, s+1))$, т.е.

$$\omega_s = \{\pi^*(\delta(r, s) + 1), \pi^*(\delta(r, s) + 2), \ldots, \pi^*(\delta(r, s+1))\}, \quad s = 0, \ldots, n.$$

Значит, по построению

$$\omega_g \cap \omega_k = \varnothing, \quad g \neq k, \quad |\omega_s| = r_s, \quad s = 0, \ldots, n.$$

Используя введенные множества ω_s, включение (2.22) можно записать в виде

$$\bigcup_{g=i}^{n} \omega_g \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Что и доказывает необходимость, так как множество

$$W = \bigcup_{g=1}^{n} \omega_g$$

является элементным нуль-структурным основанием, т.е. $W_\varphi(\omega_1, \ \ldots, \ \omega_n)$. ■

Доказательство достаточности. Пусть множество $W_\varphi(\omega_1, \ldots, \ \omega_n)$ — элементное нуль-структурное основание ($|\omega_s| = r_s$, $s = 0, \ \ldots, n$). Перенумеруем элементы множеств $\omega_s = \{g_{\delta(r,s)+1}, \ \ldots, \ g_{\delta(r,s+1)}\}$, $s = 1, \ldots, n$ и элементы множества

$$\omega_0 = I_m \backslash W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \{g_1, \ldots, g_{r_0}\},$$

где

$$r_0 = |I_m \backslash W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n)|.$$

Построим перестановку π^* по правилу

$$\pi^*(k) = g_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Тогда включение

$$\bigcup_{s=i}^{n} \omega_s \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

запишем в виде

$$\bigcup_{s=i}^{n}\{\pi^*(\delta(r,s)+1),\pi^*(\delta(r,s)+2),\ldots,\pi^*(\delta(r,s+1))\}=$$
$$=\{\pi^*(\delta(r,i)+1),\pi^*(\delta(r,i)+2),\ldots,\pi^*(\delta(r,n+1))\}\subset E_{\pi^*(g(i))}(\varphi), \qquad (2.23)$$

где $\delta(r,i)<g(i)\leqslant\delta(r,i+1), \quad i=1,\ldots,n.$

Но в силу леммы 2.1 включение (2.23) эквивалентно следующему:

$$\{\delta(r,i)+1,\delta(r,i)+2,\ldots,\delta(r,n+1)\}\subset E_{g(i)}(\pi^*\varphi), \qquad (2.24)$$

для $\delta(r,i)<g(i)\leqslant\delta(r,i+1), \quad i=1,\ldots,n$. И согласно *определению* 2.4 из (2.24) следует, что СОДУ (1.5) на $\pi^*\in P$ имеет нуль-структуру $ZS^m_{\pi^*\varphi}[0,n,r]$, что и требовалось доказать. ■

Следует отметить, что $|Z^m_{\pi^*\varphi}[0,n,r]|=\mathbf{V}[W_\varphi]$.

Теорема 2.3. *Для того, чтобы на множестве перестановок $P=\{\pi\}$ существовала такая перестановка $\pi^*\in P$, что СОДУ (1.5) имела бы нуль-структуру $ZS^m_{\pi^*\varphi}[l,n,r]$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два взаимно непересекающиеся множества — элементные нуль-структурные основания*

$$W^1_\varphi(\omega_1,\ldots,\omega_l), \quad W^2_\varphi(\omega_{l+1},\ldots,\omega_n),$$

для которых $\omega_0=I_p\setminus\left[W^1_\varphi(\omega_1,\ldots,\omega_l)\cup W^2_\varphi(\omega_{l+1},\ldots,\omega_n)\right]$, $|\omega_s|==r_s$, $s=0,\ldots,n$.

Доказательство этой теоремы повторяет фактически доказательство предыдущей теоремы 2.2.

Доказательство необходимости. Пусть на $\pi^*\in P$ СОДУ (1.5) имеет нуль-структуру $ZS^m_{\pi^*\varphi}[l,n,r]$. Тогда в силу *определения* 2.4 справедливы включения

$$\begin{gathered}\{\delta(r,i)+1,\delta(r,i)+2,\ldots,\delta(r,l+1)\}\subset E_{g(i)}(\pi^*\varphi),\\ \{\delta(r,j)+1,\delta(r,j)+2,\ldots,\delta(r,n+1)\}\subset E_{g(j)}(\pi^*\varphi),\end{gathered} \qquad (2.25)$$

при $\delta(r,s)<g(s)\leqslant\delta(r,s+1)$, $i=1,\ldots,l$, $j=l+1,\ldots,n$, $s=1, \ \ldots,n$.

Согласно утверждению леммы 2.1 включениям (2.25) эквивалентны следующие:

$$\begin{gathered}\{\pi^*(\delta(r,i)+1),\pi^*(\delta(r,i)+2),\ldots,\pi^*(\delta(r,l+1)\}\subset E_{\pi^*(g(i))}(\varphi),\\ \{\pi^*(\delta(r,j)+1),\pi^*(\delta(r,j)+2),\ldots,\pi^*(\delta(r,n+1)\}\subset E_{\pi^*(g(j))}(\varphi),\end{gathered} \qquad (2.26)$$

где $\delta(r,s)<g(s)\leqslant\delta(r,s+1)$, $s=1,\ldots,n$, $i=1,\ldots,l$, $j=l+1, \ \ldots,n$.

Вводя множества

$$\omega_s=\{\pi^*(\delta(r,s)+1),\pi^*(\delta(r,s)+2),\ldots,\pi^*(\delta(r,s+1))\}, \quad s=0,1,\ldots,n,$$

производим разбиение множества I_m, причем по построению этих множеств

$$\omega_g\cap\omega_k=\varnothing, \quad g\neq k, \quad |\omega_s|=r_s, \quad s=0,1,\ldots,n.$$

Включения (2.26), записанные с использованием введенных множеств ω_s, имеют вид

$$\bigcup_{g=i}^{l} \omega_g \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_i, \quad i = 1, \dots, l,$$
$$\bigcup_{g=j}^{n} \omega_g \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_j, \quad j = l+1, \dots, n.$$

Таким образом, множества

$$W_\varphi^1 = \bigcup_{g=1}^{l} \omega_g, \qquad W_\varphi^2 = \bigcup_{g=l+1}^{n} \omega_g,$$

являются элементными нуль-структурными основаниями, причем в силу построения их пересечение пусто:

$$W_\varphi^1(\omega_1, \dots, \omega_l) \cap W_\varphi^2(\omega_{l+1}, \dots, \omega_n) = \emptyset.$$

Что и доказывает необходимость. ■

Доказательство достаточности. Пусть имеем взаимно непересекающиеся элементные нуль-структурные основания

$$W_\varphi^1(\omega_1, \dots, \omega_l) \text{ и } W_\varphi^2(\omega_{l+1}, \dots, \omega_n).$$

Перенумеруем элементы множеств $\omega_s, \quad s = 1, \dots, n,$

$$\omega_s = \{g_{\delta(r,s)+1}, \dots, g_{\delta(r,s+1)}\}, \tag{2.27}$$

и элементы множества

$$\omega_0 = I_m \setminus \left[W_\varphi^1(\omega_1, \dots, \omega_l) \bigcup W_\varphi^2(\omega_{l+1}, \dots, \omega_n)\right] = \{g_1, \dots, g_{r_0}\}, \tag{2.28}$$

где $r_0 = |\omega_0|$.

Построим перестановку π^* по правилу:

$$\pi^*(k) = g_k, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.29}$$

В силу предположений справедливы включения:

$$\bigcup_{s=i}^{l} \omega_s \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_i,\ i = 1, \dots, l,$$
$$\bigcup_{s=j}^{n} \omega_s \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_j,\ j = l+1, \dots, n,$$

а с учетом (2.27)–(2.29) они примут вид

$$\{\pi^*(\delta(r,i)+1), \pi^*(\delta(r,i)+2), \dots, \pi^*(\delta(r,l+1))\} \subset E_{\pi^*(g(i))}(\varphi),$$
$$\{\pi^*(\delta(r,j)+1), \pi^*(\delta(r,j)+2), \dots, \pi^*(\delta(r,n+1))\} \subset E_{\pi^*(g(j))}(\varphi),$$

где $\delta(r,s) < g(s) \leqslant \delta(r,s+1),\ s=1,\dots,n$.

В силу леммы 2.1 этим включениям эквивалентны следующие:

$$\{\delta(r,i)+1, \delta(r,i)+2, \dots, \delta(r,l+1)\} \subset E_{g(i)}(\pi^*\varphi)$$

и

$$\{\delta(r,j)+1, \delta(r,j)+2, \dots, \delta(r,n+1)\} \subset E_{g(j)}(\pi^*\varphi),$$

для $\delta(r,s) < g(s) \leqslant \delta(r,s+1)$, $i=1,\dots,l$, $j=l+1,\dots,n$, $s= =1,\dots,n$.

А это по *определению 2.4* означает, что СОДУ (1.2) на $\pi^* \in P$ имеет нуль-структуру $ZS^m_{\pi^*\varphi}[l,n,r]$. Что и требовалось доказать. ■

Следует отметить, что $|ZS^m_{\pi^*\varphi}[l,n,r]| = \mathbf{V}[W^1_\varphi] + \mathbf{V}[W^2_\varphi]$.

Доказательство теорем 2.1–2.3 конструктивно. Так, опираясь на доказательство теоремы 2.1, можно на множестве $G \subset I_m$ выделить множество, являющееся элементным нуль-структурным основанием, а теоремы 2.2, 2.3 устанавливают связь между множествами, являющимися элементными нуль-структурными основаниями и перестановками, на которых СОДУ (1.5) имеет нуль-структуру.

§3. Алгоритм решения задач 1, 2

Строим множество $\Omega^{(1,0)} = \{i \in I_m : i \in E_i(\varphi)\}$. Если множество $\Omega^{(1,0)} = \varnothing$, то $\forall \pi \in P$, $\left|\overline{ZS^m}_{\pi\varphi}[l,n,r]\right| = 0$. Это значит, что никакое изменение порядка следования уравнений исходной системы не может обеспечить выделения групп уравнений, имеющих структурные особенности. Представляет интерес случай, когда $\Omega^{(1,0)} \neq \varnothing$.

I. Полагаем значение уровня дерева перебора $\mu = 0$ и вводим в рассмотрение пару множеств $\hat{B}^1 := \varnothing$ и $\hat{B}^2 := \varnothing$. Для определенности будем именовать их *рекордными*. В них будут храниться лучшие по суммарному весу на момент прохождения по дереву перебора упорядоченные множества, построенные в результате работы алгоритма.

II. При сформированном множестве $\Omega^{(1,\mu)}$ необходимо рассматривать два случая.

II.A. Если множество $\Omega^{(1,\mu)} \neq \varnothing$, то строим множества

$$D^{(1,\mu)}_{(i,j)}(\varphi) = E_i(\varphi) \cap H_j(\varphi) \cap \Omega^{(1,\mu)}, \quad i \in \Omega^{(1,\mu)}, \quad j \in \Omega^{(1,\mu)},$$

и множество возможных продолжений

$$S^{(1,\mu)} = \{\gamma = (i,j) \in \Omega^{(1,\mu)} \times \Omega^{(1,\mu)}, i \neq j : \{i,j\} \subset D^{(1,\mu)}_\gamma\}.$$

На каждом уровне дерева перебора вводим в рассмотрение пару вспомогательных множеств $F^{(1,\mu)} := \varnothing$ и $Q^{(1,\mu)} := \varnothing$.

II.A.1. При $\Omega^{(1,\mu)} \backslash F^{(1,\mu)} = \varnothing$ переходим на пп. II.A.1.b алгоритма.

Если же $\Omega^{(1,\mu)} \backslash F^{(1,\mu)} \neq \varnothing$, то ищем претендента $i^* \in \Omega^{(1,\mu)} \backslash F^{(1,\mu)}$ на роль *центрального* элемента:

$$w_{i^*} = \max_{i \in \Omega^{(1,\mu)} \backslash F^{(1,\mu)}} w_i.$$

Причем, если $S^{(1,\mu)} = Q^{(1,\mu)}$, то переходим на пп.II.A.1.c.

В противном случае при $S^{(1,\mu)} \backslash Q^{(1,\mu)} \neq \varnothing$ ищем очередного претендента $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*) \in S^{(1,\mu)} \backslash Q^{(1,\mu)}$ на роль *узлового* элемента на μ-м уровне:

$$\mathbf{V}\Big[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}\Big] \geqslant \mathbf{V}\Big[D_{\beta}^{(1,\mu)}\Big], \quad \forall \beta \in S^{(1,\mu)} \backslash Q^{(1,\mu)}.$$

Далее сравниваем веса претендентов на роль узлового и центрального элементов

$$\mathbf{V}\Big[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}\Big] > w_{i^*}. \tag{3.1}$$

Если неравенство (3.1) не выполняется, то переходим на пп.II.A.1.c.

В противном случае при выполнении неравенства (3.1) элемент β^* становится узловым $\beta^{(\mu)} = \beta^*$ на μ-м уровне перебора, но только при выполнении неравенства

$$\mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\mu-1}\{\beta_1, \beta_2\}\Big] + \mathbf{V}\Big[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}\Big] > \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big]\right), \tag{3.2}$$

иначе говоря, успешной проверке на целесообразность дальнейшего продвижения по ветви $\beta^{(0)}$, $\beta^{(1)}$, $\ldots$, $\beta^{(\mu-1)}$, β^*. Элемент β^*, выбранный в качестве узлового на μ-м уровне, запоминаем как использованный $Q^{(1,\mu)} := Q^{(1,\mu)} \cup \{\beta^{(1,\mu)}\}$. Формируем множество $\Omega^{(1,\mu+1)} = D_{\beta^{(1,\mu)}}^{(1,\mu)} \backslash \{\beta_1^{(1,\mu)}, \beta_2^{(1,\mu)}\}$ и, увеличивая номер уровня $\mu := \mu + 1$, переходим на пп.II алгоритма.

В случае, если неравенство (3.2) не выполняется, то переходим на пп.II.A.1.b.

II.A.1.b. Если уровень дерева перебора нулевой ($\mu = 0$), то переходим на пп. V алгоритма (переборная часть алгоритма закончена). Рекордные упорядоченные множества $\hat{B}^1$ и $\hat{B}^2$, определенные на этот момент, и являются искомыми.

В противном случае (при $\mu > 0$) очищаем рабочие множества $Q^{(1,\mu)} := \varnothing$, $F^{(1,\mu)} := \varnothing$ и, понижая уровень дерева перебора $\mu := \mu - 1$, переходим на пп. II.A.1.

II.A.1.c. Элемент i^* становится центральным на μ-м уровне перебора только при выполнении неравенства

$$w_{i^*} + \mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\mu-1}\{\beta_1^{(\xi)}, \beta_2^{(\xi)}\}\Big] > \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big]\right). \tag{3.3}$$

В случае, если справедливо неравенство (3.3), элемент i^* включаем в список использованных в качестве центральных на μ-м уровне $F^{(1,\mu)} := F^{(1,\mu)} \cup \{i^*\}$, а затем строим упорядоченное множество B^1. Количество элементов множества $B^1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ нечетно ($k = 2\mu + 1$) и сформировано по правилу

$$i_{\xi+1} = \beta_1^{(\xi)}, \quad i_{k-\xi} = \beta_2^{(\xi)}, \quad \xi = 0, 1, \ldots, \mu - 1, \ i_{\mu+1} = i^*.$$

После построения множества B^1 поднимаемся вверх по дереву перебора для построения второго упорядоченного множества B^2, переходя на пп.III алгоритма.

В случае бесперспективности продвижения по этой ветви (неравенство (3.3) не выполняется) переходим на пп. II.A.1.b.

II.B. Если множество $\Omega^{(1,\mu)} = \varnothing$, при $\mu > 0$, то построение возможного варианта упорядоченного множества $B_1 = \{i_1, \ \ldots, \ i_k\}$ закончено. Оно будет содержать

$k=2\mu$ элементов, которые определяются по правилу: $i_{\xi+1}=\beta_1^{(\xi)}$, $i_{k-\xi}=\beta_2^{(\xi)}$, $\xi=0,1,\ldots,\mu-1$. Для построения второго упорядоченного множества B^2 переходим на пп.III рассматриваемого алгоритма.

Если множество $\Omega^{(1,\mu)}=\emptyset$, при $\mu=0$, то в рамках рассматриваемых преобразований не существует перестановки, приводящей систему к нужному виду.

III. Перебор при решении *задачи 1* начинается с этого пункта алгоритма. Причем полагаем именно в этом случае $B^1:=\emptyset,\ \hat{B}^1:=:=\emptyset,\ \hat{B}^2:=\emptyset$.

Для решения *задачи 1,2* строим множество $\Omega^{(2,0)}=\Omega^{(1,0)}\backslash B^1$ при сформированном упорядоченном множестве B^1. Вводим вспомогательное множество $Q^{(2,0)}==\emptyset$. Значение номера уровня на втором дереве перебора полагаем $\nu=0$.

IV. При сформированном множестве $\Omega^{(2,\nu)}$ необходимо рассматривать два случая.

IV.A. Если множество $\Omega^{(2,\nu)}\neq\emptyset$, то строим множества

$$D^{(2,\nu)}_{(i,j)}(\varphi)=E_i(\varphi)\cap H_j(\varphi)\cap\Omega^{(2,\nu)},\quad i\in\Omega^{(2,\nu)},\quad j\in\Omega^{(2,\nu)},$$

и множество возможных продолжений $S^{(2,\nu)}$ на ν-м шаге алгоритма при выбранных узловых элементах: $\alpha^{(0)},\ \alpha^{(1)},\ \ldots,\ \alpha^{(\nu-1)}$:

$$S^{(2,\nu)}=\{\gamma=(i,j)\in\Omega^{(2,\nu)}\times\Omega^{(2,\nu)},i\neq j:\{i,j\}\subset D^{(2,\nu)}_{\gamma}\}.$$

Причем на каждом уровне при обновлении $\Omega^{(2,\nu)}$ находим претендента j^* на роль центрального $w_{j^*}=\max_{i\in\Omega^{(2,\nu)}}w_i$.

IV.A.0. При рассмотрении построенного множества $S^{(2,\nu)}$ необходимо рассматривать два случая.

IV.A.1.a. Если $S^{(2,\nu)}\backslash Q^{(2,\nu)}=\emptyset$, то переходим на пп.IV.A.1.c алгоритма. В противном случае, при $S^{(2,\nu)}\backslash Q^{(2,\nu)}\neq\emptyset$ ищем претендента на роль узлового элемента $\alpha^*\in S^{(2,\nu)}\backslash Q^{(2,\nu)}$. Среди не рассматривавшихся ранее в качестве узловых на ν-м шаге ему отвечает множество D_{α^*}, имеющее наибольший вес:

$$\mathbf{V}\left[D_{\alpha^*}\right]=\max_{\alpha\in S^{(2,\nu)}\backslash Q^{(2,\nu)}}\mathbf{V}\left[D_\alpha\right].$$

Далее проводим сравнение весов:

$$\mathbf{V}\Big[D_{\alpha^*}\Big]>w_{j^*}. \tag{3.4}$$

Если неравенство (3.4) не выполняется, то переходим на пп.IV.A.1.c.

В противном случае, необходимо провести проверку на целесообразность дальнейшего продвижения по ветви $\alpha^{(0)},\ \alpha^{(1)},\ \ldots,\ \alpha^{(\nu-1)},\ \alpha^*$. Если неравенство

$$\mathbf{V}\Big[B^1\Big]+\mathbf{V}\Big[\bigcup_{\xi=0}^{\nu-1}\{\alpha_1^{(\xi)},\alpha_2^{(\xi)}\}\Big]+\mathbf{V}\Big[D^{(2,\nu)}_{\alpha^*}\Big]>\mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big]+\mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big] \tag{3.5}$$

не выполняется, то переходим на пп.IV.A.1.b.

При выполнении неравенства (3.5) элемент α^* становится узловым: $\alpha^{(\nu)}=\alpha^*$ на ν-м уровне алгоритма.

Для перехода на следующий верхний уровень дерева перебора дополняем множество использованных в качестве узловых элементов $Q^{(2,\nu)} := Q^{(2,\nu)} \cup \{\alpha^{(\nu)}\}$, формируем множество $\Omega^{(2,\nu+1)} = D^{(2,\nu)}_{\alpha^{(\nu)}} \backslash \{\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}\}$. Затем, увеличивая номер уровня $(\nu := \nu + 1)$ и вводя множество $Q^{(2,\nu)} := \emptyset$, переходим на пп. IV.

IV.A.1.b. При $\nu > 0$ необходимо вернуться на предыдущий (нижний) уровень. Для этого очищаем множество $Q^{(2,\nu)} := \emptyset$, уменьшаем номер уровня второго дерева перебора на единицу $(\nu := \nu - 1)$ и переходим на пп. IV.A.0 данного алгоритма.

Если же $\nu = 0$, то работа алгоритма по поиску наилучшего упорядоченного множества B^2 при фиксированном B^1 закончена.

При решении *задачи 1* найденное рекордное множество $\hat{B}^2$ и есть искомое. Для продолжения решения этой задачи требуется перейти на пп.V алгоритма.

При решении *задачи 2* необходимо перейти на пп. II.A.1 для построения нового упорядоченного множества B^1.

IV.A.1.c. Элемент j^* становится центральным на ν-м уровне перебора только при выполнении неравенства

$$\mathbf{V}\Big[B^1\Big] + w_{j^*} + \mathbf{V}\Big[\bigcup_{\mu=0}^{\nu-1}\{\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}\}\Big] > \mathbf{V}\Big[\hat{B}^1\Big] + \mathbf{V}\Big[\hat{B}^2\Big]. \tag{3.6}$$

В этом случае необходимо сформировать упорядоченное множество $B^2 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Количество его элементов нечетно $(k = 2\nu+1)$ и определяется по правилу

$$i_{\xi+1} = \alpha_1^{(\xi)}, \quad i_{k-\xi} = \alpha_2^{(\xi)}, \quad \xi = 0, 1, \ldots, \nu - 1; \quad i_{\nu+1} = j^*.$$

При сформированном B^2 необходимо перейти на пп.IV.B.1.a.

Если же неравенство (3.6) не выполняется, то переходим на пп.IV.A.1.b.

IV.B. Если множество $\Omega^{(2,\nu)} = \emptyset$, то возможны два случая.

IV.B.1. При $\nu \neq 0$ проход по этой ветви закончен. Причем $B^2 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ будет содержать $k = 2\nu$ элементов, которые определяются по правилу: $i_{\xi+1} = \alpha_1^{(\xi)}$, $i_{k-\xi} = \alpha_2^{(\xi)}$, $\xi = 0, 1, \ldots,\ \nu - 1$.

IV.B.1.a. Следует провести замену рекордных упорядоченных множеств $\hat{B}^1 := B^1$ и $\hat{B}^2 := B^2$. Причем, если справедливо равенство

$$\mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right] = \mathbf{V}\left[\Omega^{(1,0)}\right], \tag{3.7}$$

то перебор закончен, так как сумма весов найденных упорядоченных множеств имеет максимально возможный вес. В этом случае необходимо приступить к выполнению следующего этапа алгоритма – пп.V.

Если равенство (3.7) не выполняется, то следует продолжить перебор. Для этого надо перейти на пп.IV.A.1.b.

IV.B.2. При $\nu = 0$ на множестве $I_m \backslash B^1$ не существует упорядоченного непустого множества B^2 с заданными свойствами. При $B^1 \neq \emptyset$ рекордными становятся $\hat{B}^1 = B^1,\ B^2 = \emptyset$. После этого переходим на пп.V.

Работа алгоритма по пп. I-IV будет закончена естественным образом на нулевом уровне дерева перебора при бесперспективности продолжения перебора с построенными упорядоченными множествами $\hat{B}^1$ и $\hat{B}^2$. Только после этого выполняется следующий пункт алгоритма.

На рис. 3.1, 3.2 представлена детальная блок-схема переборной части (пп.I-пп.IV) данного алгоритма.

Замечание 3.1. Элементы любого упорядоченного множества $B^s = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $s = 1, 2$, построенного по пп. I-IV данного алгоритма, удовлетворяют условию (2.4) теоремы 2.1. Покажем это. Действительно, по построению справедливы следующие включения:

$$
\begin{aligned}
&\{i_1, i_k\} \subset E_{i_1}(\varphi) \cap H_{i_k}(\varphi) \cap \Omega^{(s,0)} \equiv \hat{D}^{(s,0)},\\
&\Omega^{(s,1)} = \hat{D}^{(s,0)} \backslash \{i_1, i_k\},\\
&\{i_2, i_{k-1}\} \subset E_{i_2}(\varphi) \cap H_{i_{k-1}}(\varphi) \cap \Omega^{(s,1)} \equiv \hat{D}^{(s,1)},\\
&\Omega^{(s,2)} = \hat{D}^{(s,1)} \backslash \{i_2, i_{k-1}\};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\{i_{t(s)}, i_{k+1-t(s)}\} \subset E_{i_{t(s)}}(\varphi) \cap H_{i_{k+1-t(s)}}(\varphi) \cap\\
&\qquad \cap \Omega^{(s,t(s)-1)} \equiv \hat{D}^{(s,t(s)-1)},\\
&\Omega^{(s,t(s))} = \hat{D}^{(s,t(s)-1)} \backslash \{i_{t(s)}, i_{k+1-t(s)}\}.\\
&\Omega^{(s,t(s))} = \begin{cases} \varnothing, & k = 2t(s),\\ \{i_{t(s)+1}\}, & k = 2t(s)+1. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

И в силу того, что

$$
\hat{D}^{(s,t(s)-1)} \subset \hat{D}^{(s,t(s)-2)} \subset \ldots \hat{D}^{(s,1)} \subset \hat{D}^{(s,0)},
$$

справедливы включения

$$
\{i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{k+1-p}\} \subset E_{i_p}(\varphi) \cap H_{i_{k+1-p}}(\varphi), \quad t(1) = \mu,\ t(2) = \nu,\ p = 1, \ldots, t(s).
$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 3.2. Для любого упорядоченного множества $B^s = = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $s = 1, 2$, построенного по пп. I-IV, можно провести разбиение на классы.

Для этого полагаем, что $i_1 \in \omega_1$. Элемент i_2 будет принадлежать множеству ω_1, если $i_1 \in E_{i_2}(\varphi)$. Если же $i_1 \notin E_{i_2}(\varphi)$, то $\omega_1 = \{i_1\}$ и $i_2 \in \omega_2$.

Предположим, что $\{i_1, i_2\} \subset \omega_1$. Тогда, если $\{i_1, i_2\} \subset E_{i_3}(\varphi)$, то $i_3 \in \omega_1$, иначе (если $\{i_1, i_2\} \not\subset E_{i_3}(\varphi)$) $i_3 \in \omega_2$.

Допустим, что уже произведено разбиение множества $B^s = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ до элемента $i_{u_{\xi-1}+d}$ включительно, т.е.

$$
\omega_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{u_1}\},\ \omega_2 = \{i_{u_1+1}, i_2, \ldots, i_{u_2}\}, \ldots, \omega_{\xi-1} = \{i_{u_{\xi-2}+1}, \ldots, i_{u_{\xi-1}}\},
$$

и установлено, что $\{i_{u_{\xi-1}+1}, \ldots, i_{u_{\xi-1}+d}\} \subset \omega_\xi$.

Элемент $i_{u_{\xi-1}+d+1}$ упорядоченного множества будет принадлежать этому же классу $i_{u_{\xi-1}+d+1} \in \omega_\xi$, если справедливо включение $\{i_{u_{\xi-1}+1}, \ldots, i_{u_{\xi-1}+d}\} \subset \subset E_{i_{u_{\xi-1}+d+1}}(\varphi)$. После чего естественным образом переходим к рассмотрению следующего элемента $i_{u_{\xi-1}+d+2}$ на принадлежность множеству ω_ξ.

В случае, если $\{i_{u_{\xi-1}+1}, \ldots, i_{u_{\xi-1}+d}\} \not\subset E_{i_{u_{\xi-1}+d+1}}(\varphi)$, формирование класса ω_ξ закончено, и $\omega_\xi = \{i_{u_{\xi-1}+1}, \ldots, i_{u_\xi}\}$, $u_\xi = u_{\xi-1} + d$, $i_{u_\xi+1} \in \omega_{\xi+1}$. После этого проверяем на принадлежность множеству $\omega_{\xi+1}$ элемент $i_{u_\xi+2}$.

И так до тех пор, пока не исчерпаем все элементы множества B^s.

Для проведенного разбиения упорядоченного множества B^s на классы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p(s)}$ справедливо представление $B^s = \bigcup_{i=1}^{p(s)} \omega_i$, причем $\bigcup_{i=d}^{p(s)} \omega_i \subset E_g(\varphi)$, $\forall g \in \in \omega_d$, $d = 1, \ldots, p(s)$, $\omega_t \cap \omega_q = \varnothing$, $t \neq q$, которое обеспечивает выполнение условия (2.5) теоремы 2.1. А это значит, что все построенные упорядоченные множества B^s являются (с учетом *замечания 3.1* и утверждения теоремы 2.1) элементными нуль-структурными основаниями $B^s_\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p(s)})$.

V. Руководствуясь правилом *замечания 3.2*, проведем поочередно разбиение рекордных множеств на классы. Сначала сделаем это для упорядоченного множества $\hat{B}^2 \equiv \hat{B}^2_\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l)$, а затем для $\hat{B}^1 \equiv \hat{B}^1_\varphi(\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \ldots, \omega_n)$.

Замечание 3.3. Результатом работы алгоритма является построение двух взаимно непересекающихся элементных нуль-структурных оснований $\hat{B}^1$, $\hat{B}^2$ — пары, имеющей максимальный суммарный вес.

Действительно, были рассмотрены пары взаимно непересекающихся упорядоченных множеств B^1, B^2 на множестве I_m. Из рассмотрения были исключены лишь те, которые заведомо не могли дать максимальной суммы (ограничения (3.5), (3.6)), а также те, которые не удовлетворяли условиям (3.2), (3.3).

Условия (3.2), (3.3) выражают симметричность построения B^1 на множестве I_m и B^2 на множестве $I_m \backslash B^1$.

Предположим, что нашлась такая пара $\bar{B}^1$ и $\bar{B}^2$ среди пар взаимно непересекающихся упорядоченных множеств, не рассмотренных нами из-за ограничений (3.2), (3.3), для которой суммарный их вес превосходит суммарный вес рекордных множеств, т.е. справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}\left[\bar{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\bar{B}^2\right] > \mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right], \\ &\mathbf{V}\left[\bar{B}^1\right] \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right]\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Замечание 3.4. Руководствуясь утверждениями теоремы 2.2 (для решения *задачи 1*) и теоремы 2.3 (для решения *задачи 2*), для любой пары $B^1_\varphi(\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \ldots, \omega_n)$ и $B^2_\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l)$ элементных нуль-структурных оснований (полученной в результате работы пп. I-V алгоритма) можно построить перестановку $\pi \in P$, на которой СОДУ (1.5) имеет нуль-структуру $ZS^m_{\pi\varphi}[l, n, r]$, $l \in N$.

Но в таком случае неравенство (3.9) справедливо только при

$$\mathbf{V}\left[\bar{B}^2\right] > \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}\left[\hat{B}^1\right] + \mathbf{V}\left[\hat{B}^2\right]\right).$$

А это значит, что упорядоченное множество $\bar{B}^2 \subset I_m \backslash \bar{B}^1 \subset I_m$ уже рассматривалось при построении первого упорядоченного множества. Полученное противоречие и доказывает утверждение. Для этого необходимо перенумеровать элементы классов

$$\omega_s = \{g_{\delta(r,s)+1}, \ldots, g_{\delta(r,s)+r_s}\}, \quad r_s = |\omega_s|, \quad s = 1, \ldots, n,$$

элементных нуль-структурных оснований $B^2_\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l,)$ и $B^2_\varphi(\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \ldots, \omega_n)$ и множества

$$\omega_0 = I_m \backslash \left(B^1 \cup B^2\right) = \{g_1, \ldots, g_{r_0}\}, \text{ где } r_0 = |\omega_0|.$$

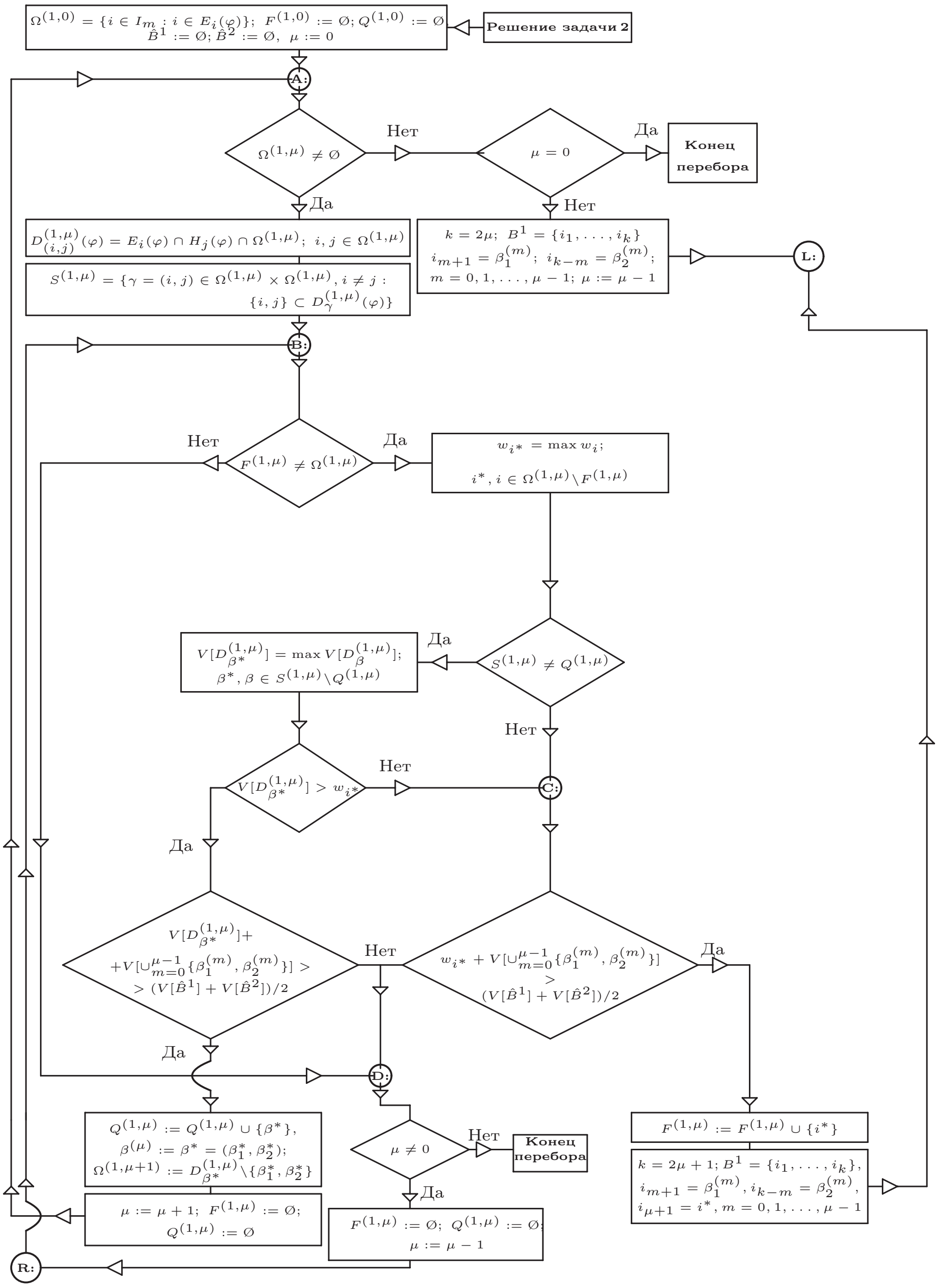
Решение задачи 2
$\Omega^{(1,0)} = \{i \in I_m : i \in E_i(\varphi)\};\ F^{(1,0)} := \varnothing;\ Q^{(1,0)} := \varnothing$
$\hat{B}^1 := \varnothing;\ \hat{B}^2 := \varnothing,\ \mu := 0$
A:
$\Omega^{(1,\mu)} \neq \varnothing$
Нет
$\mu = 0$
Да
Конец перебора
Да
Нет
$D_{(i,j)}^{(1,\mu)}(\varphi) = E_i(\varphi) \cap H_j(\varphi) \cap \Omega^{(1,\mu)};\ i,j \in \Omega^{(1,\mu)}$
$S^{(1,\mu)} = \{\gamma = (i,j) \in \Omega^{(1,\mu)} \times \Omega^{(1,\mu)}, i \neq j : \{i,j\} \subset D_\gamma^{(1,\mu)}(\varphi)\}$
$k = 2\mu;\ B^1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$
$i_{m+1} = \beta_1^{(m)};\ i_{k-m} = \beta_2^{(m)};$
$m = 0, 1, \ldots, \mu - 1;\ \mu := \mu - 1$
L:
B:
Нет
$F^{(1,\mu)} \neq \Omega^{(1,\mu)}$
Да
$w_{i^*} = \max w_i;$
$i^*, i \in \Omega^{(1,\mu)} \backslash F^{(1,\mu)}$
Да
$V[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}] = \max V[D_\beta^{(1,\mu)}];$
$\beta^*, \beta \in S^{(1,\mu)} \backslash Q^{(1,\mu)}$
$S^{(1,\mu)} \neq Q^{(1,\mu)}$
Нет
$V[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}] > w_{i^*}$
Нет
C:
Да
$V[D_{\beta^*}^{(1,\mu)}]+$
$+V[\cup_{m=0}^{\mu-1}\{\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}\}] >$
$> (V[\hat{B}^1] + V[\hat{B}^2])/2$
Нет
$w_{i^*} + V[\cup_{m=0}^{\mu-1}\{\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}\}]$
$>$
$(V[\hat{B}^1] + V[\hat{B}^2])/2$
Да
Да
D:
$Q^{(1,\mu)} := Q^{(1,\mu)} \cup \{\beta^*\},$
$\beta^{(\mu)} := \beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*);$
$\Omega^{(1,\mu+1)} := D_{\beta^*}^{(1,\mu)} \backslash \{\beta_1^*, \beta_2^*\}$
$\mu \neq 0$
Нет
Конец перебора
Да
$F^{(1,\mu)} := F^{(1,\mu)} \cup \{i^*\}$
$k = 2\mu + 1;\ B^1 = \{i_1, \ldots, i_k\},$
$i_{m+1} = \beta_1^{(m)}, i_{k-m} = \beta_2^{(m)},$
$i_{\mu+1} = i^*, m = 0, 1, \ldots, \mu - 1$
$\mu := \mu + 1;\ F^{(1,\mu)} := \varnothing;$
$Q^{(1,\mu)} := \varnothing$
$F^{(1,\mu)} := \varnothing;\ Q^{(1,\mu)} := \varnothing;$
$\mu := \mu - 1$
R:

Рис. 3.1

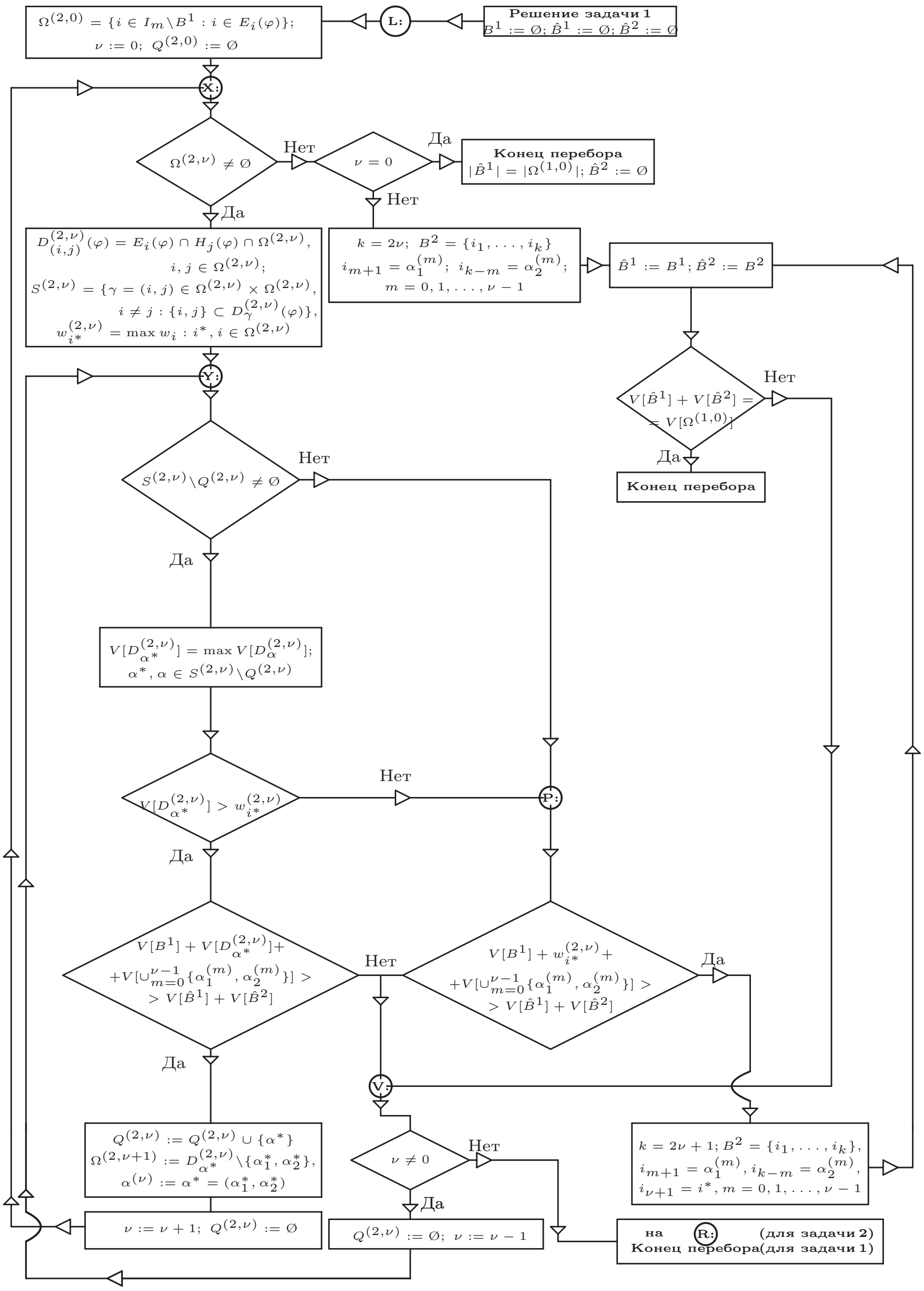
Решение задачи 1
$B^1 := \varnothing; \hat{B}^1 := \varnothing; \hat{B}^2 := \varnothing$
L:
$\Omega^{(2,0)} = \{i \in I_m \backslash B^1 : i \in E_i(\varphi)\};$
$\nu := 0;\ Q^{(2,0)} := \varnothing$
X:
$\Omega^{(2,\nu)} \neq \varnothing$
Нет
$\nu = 0$
Да
Конец перебора
$|\hat{B}^1| = |\Omega^{(1,0)}|; \hat{B}^2 := \varnothing$
Нет
Да
$D^{(2,\nu)}_{(i,j)}(\varphi) = E_i(\varphi) \cap H_j(\varphi) \cap \Omega^{(2,\nu)},$
$i, j \in \Omega^{(2,\nu)};$
$S^{(2,\nu)} = \{\gamma = (i,j) \in \Omega^{(2,\nu)} \times \Omega^{(2,\nu)},$
$i \neq j : \{i,j\} \subset D^{(2,\nu)}_{\gamma}(\varphi)\},$
$w^{(2,\nu)}_{i^*} = \max w_i : i^*, i \in \Omega^{(2,\nu)}$
$k = 2\nu;\ B^2 = \{i_1, \ldots, i_k\}$
$i_{m+1} = \alpha^{(m)}_1;\ i_{k-m} = \alpha^{(m)}_2;$
$m = 0, 1, \ldots, \nu - 1$
$\hat{B}^1 := B^1; \hat{B}^2 := B^2$
$V[\hat{B}^1] + V[\hat{B}^2] =$
$= V[\Omega^{(1,0)}]$
Нет
Да
Конец перебора
Y:
$S^{(2,\nu)} \backslash Q^{(2,\nu)} \neq \varnothing$
Нет
Да
$V[D^{(2,\nu)}_{\alpha^*}] = \max V[D^{(2,\nu)}_{\alpha}];$
$\alpha^*, \alpha \in S^{(2,\nu)} \backslash Q^{(2,\nu)}$
$V[D^{(2,\nu)}_{\alpha^*}] > w^{(2,\nu)}_{i^*}$
Нет
P:
Да
$V[B^1] + V[D^{(2,\nu)}_{\alpha^*}]+$
$+V[\cup^{\nu-1}_{m=0}\{\alpha^{(m)}_1, \alpha^{(m)}_2\}] >$
$> V[\hat{B}^1] + V[\hat{B}^2]$
Нет
$V[B^1] + w^{(2,\nu)}_{i^*}+$
$+V[\cup^{\nu-1}_{m=0}\{\alpha^{(m)}_1, \alpha^{(m)}_2\}] >$
$> V[\hat{B}^1] + V[\hat{B}^2]$
Да
Да
V:
$Q^{(2,\nu)} := Q^{(2,\nu)} \cup \{\alpha^*\}$
$\Omega^{(2,\nu+1)} := D^{(2,\nu)}_{\alpha^*} \backslash \{\alpha^*_1, \alpha^*_2\},$
$\alpha^{(\nu)} := \alpha^* = (\alpha^*_1, \alpha^*_2)$
$\nu \neq 0$
Нет
Да
$k = 2\nu + 1; B^2 = \{i_1, \ldots, i_k\},$
$i_{m+1} = \alpha^{(m)}_1, i_{k-m} = \alpha^{(m)}_2,$
$i_{\nu+1} = i^*, m = 0, 1, \ldots, \nu - 1$
$\nu := \nu + 1;\ Q^{(2,\nu)} := \varnothing$
$Q^{(2,\nu)} := \varnothing;\ \nu := \nu - 1$
на R: (для задачи 2)
Конец перебора(для задачи 1)

Рис. 3.2

После этого искомая перестановка имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r_0 & r_0+1 & \dots \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_{r_0} & g_{\delta(r,1)+1} & \cdots \end{pmatrix.$$
$$\begin{matrix} \dots & \delta(r,l+1) & \delta(r,l+1)+1 & \dots & m \\ \cdots & g_{\delta(r,l+1)} & g_{\delta(r,l+1)+1} & \cdots & g_{\delta(r,n+1)} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $ZS^m_{\pi\varphi}[l,n,r]$ для любой пары нуль-структурных оснований B^1, B^2, сформированной пп. I-IV алгоритма, является предельной.

Предположим, что это не так, т.е. справедливы включения:

$$\left\{g_{\delta(r,1)}, \dots, g_{\delta(r,l+1)}\right\} \subset E_{g_{\delta(r,1)}}(\varphi)\,,\; l > 0,$$

$$\left\{g_{\delta(r,l+1)}, \dots, g_{\delta(r,n+1)}\right\} \subset E_{g_{\delta(r,l+1)}}(\varphi)\,,\; l \geqslant 0.$$

А это значит, что как для упорядоченного множества $\bar{B}^1 = \{g_{\delta(r,l+1)}, g_{\delta(r,l+1)+1}, \dots, g_{\delta(r,n+1)}\}$, так и для $\bar{B}^2 = \{g_{\delta(r,1)},\ g_{\delta(r,1)+1}, \dots, g_{\delta(r,l+1)-1}\}$ выполняются включения алгоритма (3.8). И в силу того, что $\mathbf{V}[\bar{B}^1] > \mathbf{V}[B^1]$ и $\mathbf{V}[\bar{B}^1]+$ $+\mathbf{V}[\bar{B}^2] > \mathbf{V}[B^1] + \mathbf{V}[B^2]$ пара B^1, B^2 вообще не могла быть построена в рамках приведенного алгоритма. Полученное противоречие и доказывает предельность нуль-структуры. Таким образом, *нуль-структура* $ZS^m_{\pi\varphi}[l,n,r]$, $l \in N$ *на любой перестановке* π, *построенной по правилу, приведенному выше, является предельной.*

VI. Руководствуясь *замечанием 3.4*, на базе рекордных элементных нуль-структурных оснований $\hat{B}^1$, $\hat{B}^2$ строим искомую перестановку π^*, которая является решением *задач 1* или *2*.

Отдельно следует отметить, что для использования алгоритма при решении *задачи 1* необходимо считать постоянно $B^1 = \varnothing$ и $\hat{B}^1 = \varnothing$. Начать работу алгоритма следует с пп. III и ограничить только перебором по верхнему дереву, т.е. требование спуститься по дереву перебора на поиск нового упорядоченного множества B^1 означает (при решении *задачи 1*) окончание перебора с переходом на пп. V.

§4. Пример применения алгоритма выделения структурных особенностей. Равноправные правые части

Рассмотрим работу алгоритма решения *задачи 2* на примере выделения нуль-структуры $ZS^m_{\pi^* F}[l,n,r]$ максимального объема для СОДУ:

$$y^{'} = F(x,y), \quad y, F \in R^7, \tag{4.1}$$

структурная матрица которой имеет вид

$$A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Причем предполагаем, что весовые коэффициенты $w_1 = \ldots = w_7 = 1$. Правые части равнозатратны. В этом случае для $\forall\, W \subset I_m$ очевидно равенство $\mathbf{V}\,[W] = |W|$. Для старта алгоритма необходимо построить множества:

$$\begin{array}{ll}
E_1(F) = \{1,3,4\}, & H_1(F) = \{1,2,3,4,7\},\\
E_2(F) = \{1,2,3,5,6\}, & H_2(F) = \{2,3,4,5\},\\
E_3(F) = \{1,2,3,5\}, & H_3(F) = \{1,2,3,4,7\},\\
E_4(F) = \{1,2,3,4,6\}, & H_4(F) = \{1,4,5\},\\
E_5(F) = \{2,4,7\}, & H_5(F) = \{2,3,7\},\\
E_6(F) = \{6\}, & H_6(F) = \{2,4,6\},\\
E_7(F) = \{1,3,5,7\}, & H_7(F) = \{5,7\}.
\end{array}$$

Так как множество $\Omega^{(1,0)} = \{1,2,3,4,6,7\}$ не пусто, то на I_m существует перестановка π^*, где объем предельной нуль-структуры $|\bar{Z}S^m_{\pi^* F}[l,n,r]| > 0$.

Множества

$$D^{(1,0)}_{(i,j)} = E_i(F) \cap H_j(F) \cap \Omega^{(1,0)},\ i \in \Omega^{(1,0)},\ j \in \Omega^{(0)},\ i \neq j,$$

выпишем в порядке убывания мощностей:

$$\begin{array}{lll}
D^{(1,0)}_{(4,1)} = \{1,2,3,4\}, & D^{(1,0)}_{(4,3)} = \{1,2,3,4\}, & D^{(1,0)}_{(1,3)} = \{1,3,4\},\\
D^{(1,0)}_{(2,1)} = \{1,2,3\}, & D^{(1,0)}_{(2,3)} = \{1,2,3\}, & D^{(1,0)}_{(3,1)} = \{1,2,3\},\\
D^{(1,0)}_{(4,2)} = \{2,3,4\}, & D^{(1,0)}_{(4,6)} = \{2,4,6\}, & D^{(1,0)}_{(7,1)} = \{1,3,7\},\\
D^{(1,0)}_{(7,3)} = \{1,3,7\}, & D^{(1,0)}_{(1,4)} = \{1,4\}, & D^{(1,0)}_{(2,6)} = \{2,6\},\\
D^{(1,0)}_{(3,2)} = \{2,3\}. & &
\end{array}$$

Для остальных множеств $D^{(1,0)}_{(i,j)}$ характерным является невключение $\{i,j\} \not\subset D^{(1,0)}_{(i,j)}$:

$$\begin{array}{lll}
D^{(1,0)}_{(1,2)} = \{3,4\}, & D^{(1,0)}_{(1,6)} = \{4\}, & D^{(1,0)}_{(1,7)} = \varnothing,\\
D^{(1,0)}_{(2,4)} = \{1\}, & D^{(1,0)}_{(2,7)} = \varnothing, & D^{(1,0)}_{(3,4)} = \{1\},\\
D^{(1,0)}_{(3,6)} = \{2\}, & D^{(1,0)}_{(3,7)} = \varnothing, & D^{(1,0)}_{(4,7)} = \varnothing,\\
D^{(1,0)}_{(6,2)} = \varnothing, & D^{(1,0)}_{(6,3)} = \varnothing, & D^{(1,0)}_{(6,4)} = \varnothing,\\
D^{(1,0)}_{(6,7)} = \varnothing, & D^{(1,0)}_{(7,2)} = \{3\}, & D^{(1,0)}_{(7,4)} = \{1\},\\
D^{(1,0)}_{(6,1)} = \varnothing, & D^{(1,0)}_{(7,6)} = \varnothing. &
\end{array}$$

Выпишем множество возможных продолжений нулевого шага (уровня):

$$S^{(1,0)} = \{(4,1),\, (4,3),\, (1,3),\, (2,1),\, (2,3),\, (3,1),\, (4,2),$$

$$(4,6),\, (7,1),\, (7,3),\, (1,4),\, (2,6),\, (3,2)\}.$$

1a. Так как $S^{(1,0)} \neq \varnothing$, то в качестве узлового элемента нулевого уровня выберем $\beta^{(0)} = (4,1)$ как первый из элементов множества $S^{(1,0)}$, для которых мощность

$$D^{(1,0)}_{\alpha} \cap \Omega^{(1,0)}, \quad \alpha \in S^{(1,0)}$$

равна четырем. Причем для $\beta^{(1,0)}$ справедливо неравенство (3.2).

1b. Далее строим множество

$$\Omega^{(1,1)} = \Omega^{(1,0)} \cap D^{(1,0)}_{\beta^{(0)}} \backslash \{\beta^{(0)}_1, \beta^{(0)}_2\} = \{1,2,3,4\} \backslash \{1,4\} = \{2,3\}.$$

Оно не пусто, поэтому, увеличив значение μ на единицу, т.е. $\mu = 1$, строим множество

$$S^{(1,1)} = \{(2,3),\ (3,2)\}.$$

В качестве узлового элемента на следующем уровне (первом шаге) выбираем $\beta^{(1)} = (2,3)$, так как для него справедливо неравенство (3.2), и он первый из двух элементов множества $S^{(1,1)}$, для которых мощность множества $D^{(1,1)}_{\beta} \cap \Omega^{(1,1)}$, $\beta \in S^{(1,1)}$ равна двум.

1c. Множество $\Omega^{(1,2)}$ пусто. Следовательно, упорядоченное множество B^1 построено:

$$B^1 = \{4,2,3,1\},$$

и так как его мощность равна четырем, т.е. превосходит $\frac{1}{2}(|\hat{B}^1| + |\hat{B}^2|)$, то уже при построенном B^1 переходим к построению второго упорядоченного множества B^2. Для этого полагаем значение уровня второго дерева перебора $\nu = 0$.

1d. Это имеет смысл, так как множество

$$\Omega^{(2,0)} = \Omega^{(1,0)} \backslash B^1 = \{6,7\}$$

не пусто. Множество возможных продолжений $S^{(2,0)} = \varnothing$, и значит $B^2 = \{6\}$. Таким образом, построена пара взаимно непересекающихся упорядоченных множеств B^1 и B^2, суммарная мощность которых превосходит суммарную мощность рекордных упорядоченных множеств $\hat{B}^1$ и $\hat{B}^2$. Поэтому рекордными становятся множества B^1 и B^2, т.е.

$$\hat{B}^1 = \{4,2,3,1\}, \quad \hat{B}^2 = \{6\}.$$

Затем осуществляем возврат по алгоритму, уменьшая значение μ на единицу. Среди элементов множества $S^{(1,1)}$ остался только один элемент, который еще не рассматривался в качестве узлового $\beta^{(1)} = (3,2) \in S^{(1,1)}$. Для него справедливо неравенство (3.2).

Множество возможных продолжений на втором уровне (шаге) – пусто. Следовательно, $B^1 = \{4,3,2,1\}$ и так как его мощность больше $\frac{1}{2}(|\hat{B}^1| + |\hat{B}^2|)$, переходим на пп.III алгоритма, строим множество

$$\Omega^{(2,0)} = \{6,7\}, \quad \nu = 0.$$

Множество возможных продолжений $S^{(2,0)} = \varnothing$, поэтому $B^2 = \{6\}$. Поскольку

$$|B^1| + |B^2| = |\hat{B}^1| + |\hat{B}^2|,$$

т.е. суммарный объем новой пары взаимно непересекающихся множеств B^1 и B^2 не превосходит суммы объемов рекордных множеств, осуществляем возврат по алгоритму. В множестве $S^{(1,1)}$ возможных продолжений все элементы уже рассматривались в качестве узловых, поэтому спускаемся на предыдущий уровень (нулевой), уменьшая значение μ на единицу. На роль узлового элемента выбираем $\beta^{(0)} = (4,3) \in S^{(1,0)}$.

Изложение дальнейшего будем вести схематично, так как основные моменты построения множеств B^1 и B^2 подробно обсуждены при прохождении первой ветви:

$$S^{(1,0)} = \{(4,1),\ (4,3),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (4,2),$$
$$(4,6),\ (7,1),\ (7,3),\ (1,4),\ (2,6),\ (3,2)\};$$

$$\begin{aligned}
2)\qquad & \mu = 0,\ \beta^{(0)} = (4,3),\ \Longrightarrow\ \Omega^{(1,1)} = \{1,2\},\ \mu = 1,\\
& S^{(1,1)} = \{(2,1)\},\ \beta^{(1)} = (2,1),\ \Longrightarrow\ \Omega^{(2,1)} = \varnothing,\\
& \qquad\qquad \Longrightarrow\ B^1 = \{4,2,1,3\},\\
& \Omega^{(2,0)} = \Omega^{(1,0)} \backslash B^1 = \{6,7\},\ \nu = 0,\ S^{(2,0)} = \varnothing,\\
& \qquad\qquad \Longrightarrow\ B^2 = \{6\},\\
& |B^1| + |B^2| = 5,
\end{aligned}$$

поэтому осуществляем возврат по дереву перебора;

$$\begin{aligned}
3)\qquad & \mu = 0,\ \beta^{(0)} = (1,3),\ \Longrightarrow\ \Omega^{(1,1)} = \{4\},\quad \mu = 1,\\
& S^{(1,1)} = \varnothing, \Longrightarrow\ B^1 = \{1,4,3\},\\
& \Omega^{(2,0)} = \Omega^{(1,0)} \backslash B^1 = \{2,6,7\},\ \nu = 0,\ S^{(2,0)} = \{(2,6)\},\\
& \alpha^{(0)} = (2,6),\ \Longrightarrow \Omega^{(2,1)} = \varnothing,\quad \Longrightarrow\ B^2 = \{2,6\},\\
& |B^1| + |B^2| = 5,
\end{aligned}$$

поэтому осуществляем возврат по дереву перебора;

$$\begin{aligned}
4)\qquad & \mu = 0,\ \beta^{(0)} = (2,1),\ \Longrightarrow \Omega^{(1,1)} = \{3\},\quad \mu = 1,\\
& S^{(1,1)} = \varnothing,\quad \Longrightarrow\ B^1 = \{2,3,1\},\\
& \Omega^{(2,0)} = \Omega^{(1,0)} \backslash B^1 = \{4,6,7\},\ \nu = 0,\\
& S^{(2,0)} = \{(4,6)\},\quad \alpha^{(0)} = (4,6),\ \Longrightarrow \Omega^{(2,1)} = \varnothing, \Longrightarrow\\
& B^2 = \{4,6\},\quad |B^1| + |B^2| = 5,
\end{aligned}$$

поэтому осуществляем возврат по дереву перебора;

$$\begin{aligned}
5)\qquad & \mu = 0,\ \beta^{(0)} = (2,3),\ \Longrightarrow \Omega^{(1,1)} = \{1\},\quad \mu = 1,\\
& S^{(1,1)} = \varnothing, \Longrightarrow\ B^1 = \{2,1,3\},\\
& \Omega^{(2,0)} = \Omega^{(1,0)} \backslash B^1 = \{4,6,7\},\ \nu = 0,\\
& \qquad S^{(2,0)} = \{(4,6)\},\\
& \alpha^{(0)} = (4,6),\ \Longrightarrow\ \Omega^{(2,1)} = \varnothing,\ \Longrightarrow\ B^2 = \{4,6\},\\
& |B^1| + |B^2| = 5,
\end{aligned}$$

поэтому осуществляем возврат по дереву перебора;

$$\begin{aligned}
6)\qquad & \mu = 0,\ \beta^{(0)} = (3,1),\ \Longrightarrow \Omega^{(1,1)} = \{2\},\quad \mu = 1,\\
& S^{(1,1)} = \varnothing, \Longrightarrow\ B^1 = \{3,2,1\},\\
& \Omega^{(2,0)} = \Omega^{(1,0)} \backslash B^1 = \{4,6,7\},\ \nu = 0,\ S^{(2,0)} = \{(4,6)\},\\
& \alpha^{(0)} = (4,6),\ \Longrightarrow \Omega^{(2,1)} = \varnothing, \Longrightarrow\ B^2 = \{4,6\},\\
& |B^1| + |B^2| = 5,
\end{aligned}$$

поэтому осуществляем возврат по дереву перебора;

$$
\begin{array}{ll}
7) & \mu=0,\ \beta^{(0)}=(4,2),\Longrightarrow \Omega^{(1,1)}=\{3\},\ \mu=1,\\
& S^{(1,1)}=\emptyset,\Longrightarrow\ B^1=\{4,3,2\},\\
& \Omega^{(2,0)}=\Omega^{(1,0)}\backslash B^1=\{1,6,7\},\ \nu=0,\\
& S^{(2,0)}=\{(7,1)\},\ \alpha^{(0)}=(4,6),\ \Longrightarrow \Omega^{(2,1)}=\emptyset,\Longrightarrow\\
& B^2=\{7,1\},\quad |B^1|+|B^2|=5,
\end{array}
$$

поэтому осуществляем возврат по дереву перебора;

$$
\begin{array}{ll}
8) & \mu=0,\ \beta^{(0)}=(4,6),\Longrightarrow \Omega^{(1,1)}=\{2\},\ \mu=1,\\
& S^{(1,1)}=\emptyset,\Longrightarrow\ B^1=\{4,2,6\},\\
& \Omega^{(2,0)}=\Omega^{(1,0)}\backslash B^1=\{1,3,7\},\ \nu=0,\\
& S^{(2,0)}=\{(7,1),\,(7,3),\,(1,3)\,(3,1)\},\\
& \alpha^{(0)}=(7,1),\ \Longrightarrow\ \Omega^{(2,1)}=\{3\},\ \nu=1,\\
& S^{(2,1)}=\emptyset,\Longrightarrow\ B^2=\{7,3,1\},\\
& |B^1|+|B^2|=6>|\hat{B}^1|+|\hat{B}^2|=5,\\
& \Longrightarrow \hat{B}^1=\{4,2,6\},\ \hat{B}^2=\{7,3,1\}.
\end{array}
$$

Возврат на один уровень вниз по алгоритму, т.е. уменьшение значения ν на единицу, приводит к просмотру на роль узлового на втором шаге элементов $(7,3)$, $(1,3)$, $(3,1)$ множества $S^{(2,0)}$. Но ни для одного из них не выполняется неравенство (3.5). Дальнейший возврат (уже по первому дереву перебора) приводит к просмотру на роль узлового на нулевом уровне элементов: $(7,3)$, $(1,4)$, $(2,6)$, $(3,2)$ множества $S^{(1,0)}$. Но в силу того, что неравенство (3.2) ни для одного из них не выполняется, поиск пары взаимно непересекающихся множеств B^1 и B^2, суммарная мощность которых максимальна, можно прекратить.

Затем следует перейти к пункту V алгоритма – разбиению множеств $\hat{B}^1$ и $\hat{B}^2$ на классы:

1. Полагаем, что $\{4\}\in\omega_1$, и так как $\{4\}\notin E_2(F)$, то $\omega_1=\{4\}$.

Далее $\{2\}\in\omega_2$, но $\{2\}\notin E_6(F)$, и значит $\omega_2=\{2\}$ и $\omega_3=\{6\}$. Таким образом, $B^1(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\{4,2,6\}$, $|\omega_s|=1$, $s=1,\ldots,3$.

2. Аналогично производим разбиение множества $\hat{B}^2$: $\{7\}\in\omega_4$, и так как $\{7\}\notin$ $\notin E_3(F)$, то $\omega_4=\{7\}$.

Далее $\{3\}\in\omega_5$, и $\{3\}\in E_1(F)$, а это значит $\omega_5=\{3,1\}$. Множество $B^2(\omega_4,\omega_5)=\{7,3,1\}$, $|\omega_4|=1$, $|\omega_5|=2$.

Теперь в соответствии с *замечанием 3.4* можем построить перестановку $\pi^*=$ $=(5,4,2,6,7,3,1)$, на которой СОДУ

$$
(\pi^* y)'=\pi^* F(x,\pi^* y) \tag{4.3}
$$

имеет нуль-структуру $ZS^7_{\pi^*F}[3,6,r]$, $r=(1,1,1,1,1,2)$. Она является предельной. Структурная матрица преобразованной системы $A(\pi^*F)$ имеет вид

Перейти к оглавлению на странице: 33

$$A(\pi^*F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Коэффициент сравнительной эффективности расчетных схем структурного метода численного интегрирования системы (4.1) равен соответственно:

$$K_2 = \frac{1}{14},\ K_3 = \frac{2}{21},\ K_4 = \frac{1}{14}.$$

Приведение же исходной системы (4.1) к виду (4.3) позволяет повысить эффективность структурного метода в три раза, так как коэффициент сравнительной эффективности расчетных схем структурного метода численного интегрирования системы (4.3) равен соответственно:

$$K_2 = \frac{3}{14},\ K_3 = \frac{2}{7},\ K_4 = \frac{3}{14}.$$

§5. Пример применения алгоритма выделения структурных особенностей. Неравноправные правые части

Продемонстрируем работу алгоритма решения *задачи 2* на примере выделения нуль-структуры $ZS^m_{\pi^*F}[l,n,r]$ максимального объема СОДУ

$$y^{'} = F(x,y), \quad y, F \in R^7. \tag{5.1}$$

Структурная матрица исходной системы

$$A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

с весовыми коэффициентами $w_2 = w_3 = 2,\ w_5 = w_6 = 3,\ w_1 = w_7 = 4,\ w_4 = 5$ имеет нуль-структуру $\overline{ZS^7}_F[1,2,r]$, $r = (5,1,1)$. Ее объем $|\overline{ZS^7}_F[1,2,r]| = 7$.

Перестановка (переобозначение)

$$\pi^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Перейти к оглавлению на странице: 33

Таблица 5.1

N	μ/ν	$\Omega^{(p,\mu/\nu)}$	$S^{(p,\mu/\nu)}$	$\lvert S^{(p,\mu/\nu)}\rvert$	$\beta^{(\mu)}/\alpha^{(\nu)}/i^*$	$\mathbf{V}[D_{\beta^*/\alpha^*}]/w_{i^*}$	B^p	$\mathbf{V}[B^p]$	$\sum_{d=1}^{2}\mathbf{V}[\hat{B}^d]$
1	$\mu=0$	$\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$	$S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\dots,(2,6)\}$	13	$\beta^{(0)}=(4,5)$	14			0
2	$\mu=1$	$\Omega^{(1,1)}=\{2,7\}$	$S^{(1,1)}=\{(2,7),(7,2)\}$	2	$\beta^{(1)}=(2,7)$	6			0
3	$\mu=2$	$\Omega^{(1,2)}=\varnothing$	$S^{(1,2)}=\varnothing$	0			$B^1=\{4,2,7,5\}$	14	0
4	$\nu=0$	$\Omega^{(2,0)}=\{1,6\}$	$S^{(2,0)}=\varnothing$	0	$i^*=1$	4	$B^2=\{1\}$	4	18
5	$\mu=1$	$\Omega^{(1,1)}=\{2,7\}$	$S^{(1,1)}=\{(2,7),(7,2)\}$	2	$\beta^{(1)}=(7,2)$	6	$B^1=\{4,7,2,5\}$	14	18
6	$\nu=0$	$\Omega^{(2,0)}=\{1,6\}$	$S^{(2,0)}=\varnothing$	0	$i^*=1$	4	$B^2=\{1\}$	4	18
7	$\mu=0$	$\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$	$S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\dots,(2,6)\}$	13	$\beta^{(0)}=(4,7)$	14			18
8	$\mu=1$	$\Omega^{(1,1)}=\{2,5\}$	$S^{(1,1)}=\{(2,5)\}$	1	$\beta^{(1)}=(2,5)$	6			18
9	$\mu=2$	$\Omega^{(1,2)}=\varnothing$	$S^{(1,2)}=\varnothing$	0			$B^1=\{4,2,5,7\}$	14	18
10	$\nu=0$	$\Omega^{(2,0)}=\{1,6\}$	$S^{(2,0)}=\varnothing$	0	$i^*=1$	4	$B^2=\{1\}$	4	18
11	$\mu=0$	$\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$	$S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\dots,(2,6)\}$	13	$\beta^{(0)}=(5,7)$	12			18
12	$\mu=1$	$\Omega^{(1,1)}=\{4\}$	$S^{(1,1)}=\varnothing$	0	$i^*=4$	5	$B^1=\{5,4,7\}$	12	18
13	$\nu=0$	$\Omega^{(2,0)}=\{1,2,6\}$	$S^{(2,0)}=\{(2,6)\}$	1	$\alpha^{(0)}=(2,6)$	5			18
14	$\nu=1$	$\Omega^{(2,1)}=\varnothing$	$S^{(2,1)}=\varnothing$	0					18
15	$\mu=0$	$\Omega^{(1,0)}=\{1,2,4,5,6,7\}$	$S^{(1,0)}=\{(4,5),(4,7),(5,7),(1,5),(1,7),\dots,(2,6)\}$	13	$\beta^{(0)}=(1,5)$	11			18
16	$\mu=1$	$\Omega^{(1,1)}=\{7\}$	$S^{(1,1)}=\varnothing$	0	$i^*=7$	4	$B^1=\{1,7,5\}$	11	18
17	$\nu=0$	$\Omega^{(2,0)}=\{2,4,6\}$	$S^{(2,0)}=\{(4,6),(4,2),(2,6)\}$	3	$\alpha^{(0)}=(4,6)$	10			18
18	$\nu=1$	$\Omega^{(2,1)}=\{2\}$	$S^{(2,1)}=\varnothing$	0	$i^*=2$	2	$B^2=\{4,2,6\}$	10	21
ω_s	$\omega_1=\{4\},\ \omega_2=\{2\},\ \omega_3=\{6\},\ \omega_4=\{1\},\ \omega_5=\{7,5\},\ \omega_0=\{3\}$						$\pi^*=(3,4,2,6,1,7,5)$		

найдена за восемнадцать шагов алгоритма (табл. 5.1). Структурная матрица преобразованной системы

$$A(\pi^*F)=\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

имеет нуль-структуру $\overline{ZS^7}_F[3,5,r]$, $r=(1,1,1,1,1,2)$ с объемом $|\overline{ZS^7}_F[3,5,r]|=21$. Эффективность применения структурного подхода при интегрировании исходной системы определяется отношением

$$\sum_{s=r_0+1}^{m} w_s \Big/ \sum_{s=1}^{m} w_s = 7/23,$$

а преобразованной $\sum_{s=r_0+1}^{m} w_{\pi(s)} / \sum_{s=1}^{m} w_{\pi(s)} = 21/23$.

§6. Использование структурного метода в задачах математического моделирования.

Рассмотрим эффект от применения идеологии структурного подхода при интегрировании [8] систем вида

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{l+1}, \ldots, y_n), & i = 1, \ldots, l, \\ y_j' = f_j(x, y_1, \ldots, y_{j-1}), & j = l+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{6.1}$$

Необходимость в интегрировании систем такого типа возникает, например, в задачах небесной механики [14], физики высоких энергий [11] и т.д. Их существенное отличие от систем рассматриваемого типа (1.2)-(1.4) состоит в том, что при отсутствующей общей группе уравнений ($r_0 = 0$) снято ограничение на число уравнений в группах (1.3), (1.4), $n \geqslant 3$. Например, при рассмотрении крупномасштабных колебаний ротационно симметричных систем [13] задача сводится к интегрированию системы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= K - \frac{x}{(2x+z)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= L - \frac{z}{(2x+z)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{dK}{dt} &= -\frac{1}{(2x+z)^{\frac{3}{2}}}\frac{dx}{dt}, \\ \frac{dL}{dt} &= -\frac{1}{(2x+z)^{\frac{3}{2}}}\frac{dz}{dt}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $x-$ безразмерный момент инерции системы относительно оси вращения; $z-$ безразмерный момент инерции относительно экваториальной плоскости; $K-$ кинетическая энергия движений параллельно экваториальной плоскости; $L-$ кинетическая энергия движений в вертикальном направлении.

Использование новых переменных $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = z$, $y_4 = z'$, $y_5 = K$, $y_6 = L$ позволяет привести систему (6.2) к виду:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 = \varphi_1(t, y_2), \\ y_2' &= \varphi_2(t, y_1, y_3, y_5), \\ y_3' &= y_4 = \varphi_3(t, y_4), \\ y_4' &= \varphi_4(t, y_1, y_3, y_6), \\ y_5' &= \varphi_5(t, y_1, y_2, y_3), \\ y_6' &= \varphi_6(t, y_1, y_3, y_4). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Структурная матрица системы (6.3)

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Так как множество $\Omega^{(0)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ не пусто, то на I_p существует перестановка π^*, согласно которой длина предельной нуль-структуры $|\bar{Z}S^p_{\pi^*\varphi}[l, n, r]| > 0$ (весовые коэффициенты полагаем равными между собой: $w_1 = \ldots = w_6 = 1$) .

Воспользовавшись алгоритмом решения *задачи 2,* строим перестановку $\pi^* = (2,4,1,3,5,6)$, на которой СОДУ

$$(\pi^* z)' = \pi\varphi(x, \pi^* z) \tag{6.5}$$

имеет нуль-структуру $ZS^6_{\pi^*\varphi}[1,3,r]$, $r = (0,2,2,2)$. Она является предельной. Действительно, используя полученную перестановку $\pi^* = (2,4,1,3,5,6)$, после переобозначения $\xi_1 = x'$, $\xi_2 = z'$, $\xi_3 = x$, $\xi_4 = z$, $\xi_5 = K$, $\xi_6 = L$ исходная система первого порядка примет вид

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \varphi_2(t, \xi_3, \xi_4, \xi_5),\\
\xi_2' &= \varphi_4(t, \xi_3, \xi_4, \xi_6),\\
\xi_3' &= \xi_1,\\
\xi_4' &= \xi_2,\\
\xi_5' &= \varphi_5(t, \xi_1, \xi_3, \xi_4),\\
\xi_6' &= \varphi_6(t, \xi_2, \xi_3, \xi_4),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

а ее структурная матрица

$$A(\pi^*\varphi) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right). \tag{6.7}$$

В системе (6.5) выделены две группы уравнений, имеющих нуль-структуру (общая отсутствует). Для ее численного интегрирования может быть использована любая из построенных в рамках структурного метода расчетная схема. Причем эффект от их применения максимально возможный. Например, при интегрировании системы (6.6) коэффициент сравнительной эффективности расчетных схем структурного метода четвертого порядка равен соответственно:

$$K_2 = \frac{1}{4},\ K_3 = \frac{1}{3},\ K_4 = \frac{1}{4}.$$

Еще более интересным представляются системы (ограниченная задача трех тел [13]; уравнения, описывающие орбиты частиц в бетатроне с азимутальным магнитным полем [11]) дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\left\{\begin{array}{rcl} z'' &=& g(t, z, y, y'),\\ y'' &=& f(t, z, y, z'). \end{array}\right. \tag{6.8}$$

Приведенная стандартным образом ($x_1 = z$, $x_2 = z'$, $x_3 = y$, $x_4 = y'$) к нормальной форме систем первого порядка (после переобозначения $\xi_1 = x_3$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_1$, $\xi_4 = x_4$) система попадает в класс рассматриваемых (6.1).

Например, плоская ограниченная задача трех тел описывается системами такого типа. Рассмотрим два тела с массами $\mu' = 1 - \mu$ и μ, участвующие в совместном круговом движении в некоторой плоскости, и движущееся вблизи них в той же плоскости третье тело пренебрежимо малой массы. Уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&x'' = x + 2y' - \mu' \frac{x+\mu}{D_1} - \mu \frac{x-\mu'}{D_2} = f_1(t, x, y, y'),\\
&y'' = y - 2x' - \mu' \frac{y}{D_1} - \mu \frac{y}{D_2} = f_2(t, x, y, x'),\\
&D_1 = \left((x+\mu)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad D_2 = \left((x-\mu')^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Надо отметить, что в силу зависимости правой части системы (6.8) от первых производных использование известных методов типа Нюстрема для интегрирования этой системы никаких явных преимуществ (изменение соотношений между числом этапов и порядком) по сравнению с формально распространенным на системы методом Рунге–Кутты не дает [14].

Перейти к оглавлению на странице: 33

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олемской И. В.* Экономичная расчетная схема четвертого порядка точности численного интегрирования систем специального вида/ Процессы управления и устойчивость. Тр. XXX научн. конф. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 1999. С. 134–143.
2. *Олемской И. В.* Четырехэтапный метод пятого порядка точности численного интегрирования систем специального вида //Журн. вычисл. математики и мат. физики, 2002, Т. 42, №8. С. 1179–1190.
3. *Олемской И. В.* Структурный подход в задаче конструирования явных одношаговых методов //Журн. вычисл. математики. и мат. физики., 2003. Т. 43, №7. С. 961–974.
4. *Олемской И. В.* Алгоритм выделения структурных особенностей /Николай Ефимович Кирин: Сб. стат. под ред.В.В.Жука, В.Ф.Кузютина, 2003. С. 234–251.
5. *Олемской И. В.* Методы типа Рунге–Кутты интегрирования систем и дифференциальных уравнений второго порядка специального вида // Вычисл. технологии, 2004. Т.9, №2. С. 67–81.
6. *Олемской И. В.* Вложенные методы пятого порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2004. Сер. 10, вып. 2. С. 82–93.
7. *Олемской И. В.* Конструирование явных методов типа Рунге–Кутты интегрирования систем специального вида// Изв. Вуз. Математика. 2005. №2(513). С. 75–80.
8. *Олемской И. В.* Явный метод типа Рунге–Кутты пятого порядка // Вычисл. технологии, 2005. Т.10, №2. С. 87–105.
9. *Олемской И. В.* Вложенный пятиэтапный метод пятого порядка типа Дормана–Принса // Журн. вычисл. математики. и мат. физики., 2005. Т. 45, №7. С. 1181–1191.
10. *Олемской И. В.* Метод пятого порядка типа Рунге-Кутты интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2005. Сер. 10, вып. 1. С. 39–48.
11. *Овсянников Д. А., Егоров Н. В.* Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков.- СПб: СПбГУ, 1998. 276 с.
12. *Бордовицына Т. В.* Обзор современных способов повышения точности численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесных тел// Астрономия и геодезия, N8, 1980. С .54–75.
13. *Кутузов С. А., Олемской И. В., Осипков Л. П., Старков В. Н.* Математические методы исследования космических систем/ Учебное пособие, СПбГУ,2003. 203 с.
14. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. -М.: Мир, 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ